

Paolo Gamba, Pietro Savazzi

**Esercizi discussi e risolti di
Comunicazioni elettriche**

Prefazione	vii
1 Problemi sui segnali deterministici e sui sistemi	1
1.1 Soluzione dei problemi	9
2 Problemi sulle variabili e i processi casuali	39
2.1 Soluzione dei problemi	44
3 Problemi sulle modulazioni analogiche	59
3.1 Soluzione dei problemi	69
4 Problemi sul campionamento	99
4.1 Soluzione dei problemi	105
5 Problemi sulle modulazioni digitali	125
5.1 Soluzione dei problemi	129
A Formulario	145

Prefazione

Questa raccolta di esercizi nascono dalla nostra esperienza come esercitatori nei vari corsi di “Comunicazioni Elettriche”, “Comunicazioni Analogiche e Digitali”, “Teoria dei Segnali” e “Teoria dei Segnali e Comunicazioni Elettriche” della Facoltà di Ingegneria dell’Università di Pavia. Essa risponde anche all’esigenza, avvertita dagli studenti di questi corsi, di avere a disposizione una revisione della raccolta di esercizi scritta più di 10 anni fa e che è sempre stata (o almeno speriamo) parte integrante della preparazione alla parte scritta dei corrispondenti esami finali.

Il testo non si propone dunque come un insieme esaustivo di esercizi della materia delle Comunicazioni Elettriche, ma solo come un punto di riferimento e una guida per la preparazione degli studenti di Pavia. Per questo motivo, la struttura del testo segue lo schema usuale, almeno da venti anni a questa parte, dei compiti scritti di questa materia, composti da due o tre esercizi e una domanda di teoria. Anche la suddivisione in esercizi su:

- i segnali deterministici e i sistemi,
- le variabili casuali e i processi aleatori,
- le modulazioni analogiche,
- il campionamento,
- le modulazioni digitali,

corrisponde alle tipologie presenti nei temi d’esame. In effetti, gli stessi problemi discussi e risolti nelle pagine successive sono esercizi proposti in appelli d’esame dal 2002 a oggi.

Ogni capitolo è preceduto da una tabella che identifica per ogni esercizio l’argomento principale in esso trattato e il livello di difficoltà, in una scala da 1 (*) a 3 (***). Si tratta, come ovvio, di una valutazione personale degli autori. Gli esercizi proposti, in realtà, sono tutti abbastanza difficili, come ci si aspetta da esercizi proposti in sede di esame conclusivo di un corso universitario.

Molti esercizi, però, contengono delle note e osservazioni che discutono i concetti usati e/o i passaggi intermedi della soluzione, per rendere l’eserciziario utile anche per un veloce ripasso e integrazione degli argomenti sviluppati nelle lezioni frontali.

L’eserciziario contiene infine una breve rassegna dei risultati della teoria che potrebbero essere utili per risolvere gli esercizi e di cui si fa largo uso nel testo. Tale rassegna è raccolta nelle tabelle dell’Appendice.

A conclusione di queste note, desideriamo ringraziare chi ci ha aiutato nella realizzazione di questo testo. Un sentito ringraziamento va quindi al Prof. Fabio Dell'Acqua e all'Ing. Emanuele Goldoni, il primo come autore di alcuni degli esercizi presentati in questa raccolta, il secondo per la paziente opera di controllo e di segnalazione degli errori del manoscritto.

Pavia, febbraio 2016

Paolo Gamba
Pietro Savazzi

1

Problemi sui segnali deterministici e sui sistemi

Problema	Argomento	Difficoltà
1.1	Spettro di un segnale periodico	***
1.2	Spettro di un segnale periodico	***
1.3	Segnale periodico e filtro	***
1.4	Spettro e autocorrelazione di un segnale periodico	***
1.5	Cross-correlazione tra segnali periodici	***
1.6	Spettro e autocorrelazione di un segnale aperiodico	***
1.7	Spettro e autocorrelazione di un segnale aperiodico	***
1.8	Spettro e filtraggio di un segnale aperiodico	**
1.9	Spettro di un segnale aperiodico	***
1.10	Componente dello spettro di un segnale aperiodico	***
1.11	Risposta impulsiva	*
1.12	Risposta impulsiva e segnale in uscita da un blocco lineare	*
1.13	Funzione di trasferimento	**
1.14	Spettro di un segnale e passaggio attraverso un blocco	***
1.15	Spettro di un segnale e passaggio attraverso un blocco	**
1.16	Risposta impulsiva	**
1.17	Approssimazione di un filtro passabasso	**
1.18	Cross-correlazione tra segnali periodici	*

Problema 1.1

Sia dato un segnale PSK ottenuto da una sequenza periodica ...010... di periodo $3T$.

Disegnare lo spettro del segnale e calcolarne la componente in continua (sia $f_0 = 50/T$).

Problema 1.2

Sia dato un segnale cosinusoidale, con ampiezza $A = 10$ V e frequenza 10 kHz. A tale segnale viene sommato, a causa di disturbi sulla rete di alimentazione, un segnale di ampiezza pari al 5% di A e frequenza 50 Hz. Infine, il rumore di trasmissione provoca l'annullamento totale del segnale per 2 ns ogni μ s.

Determinare lo spettro del segnale complessivo.

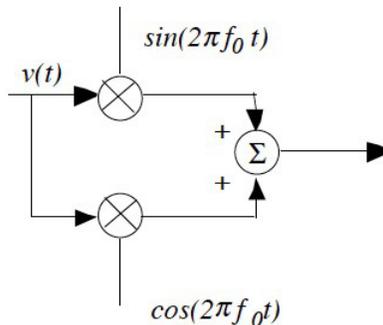
Problema 1.3

Si supponga di avere un segnale $s(t)$ in ingresso ad un filtro passabasso ideale, ove $s(t)$ è dato da una sequenza di impulsi lunghi 0.5μ s con frequenza di ripetizione pari a 1 MHz.

Si determini l'espressione del segnale in uscita al filtro e se ne disegni un periodo nei casi in cui la banda del filtro sia 1.1 MHz, 2.04 MHz e 3.5 MHz, rispettivamente.

Problema 1.4

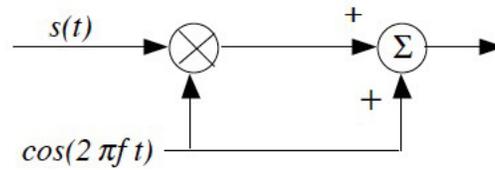
Sia dato lo schema in figura, dove $v(t)$ è il segnale periodico (di periodo $4T_0$) ...0202....



Determinare lo spettro e la autocorrelazione del segnale.

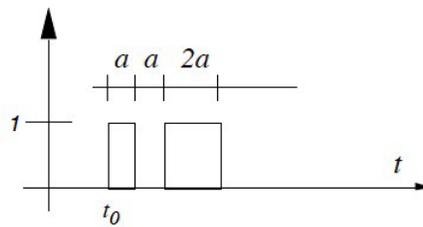
Problema 1.5

Calcolare la correlazione tra i segnali in ingresso ed uscita al circuito in figura, sapendo che $s(t) = 3 \cos \omega t + 2 \sin 2\omega t$.



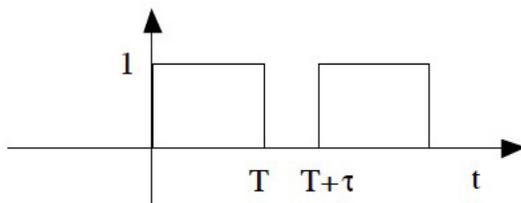
Problema 1.6

Sia dato il segnale (non periodico) in figura: calcolare il suo spettro e la sua autocorrelazione.



Problema 1.7

Calcolare e disegnare lo spettro e l'autocorrelazione del segnale in figura ($\tau = 0.2 T$).

**Problema 1.8**

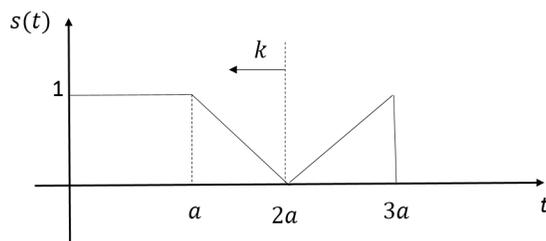
Si supponga di avere un segnale $s(t)$ in ingresso ad un filtro passabanda ideale, ove $s(t)$ è dato da

$$s(t) = 300 \operatorname{sinc} 2100t \sin 94240t$$

Si determini il valore della frequenza centrale e della banda del filtro passabanda in oggetto in maniera che in uscita si abbia il 90% della potenza in ingresso.

Problema 1.9

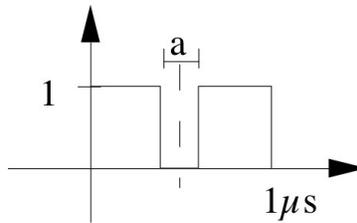
Si calcoli lo spettro e l'energia del segnale aperiodico in figura, al variare della posizione dello zero quando k varia tra 0 e a .



Si indichi poi il valore dello spettro nelle due frequenze 0 e $1/a$ al variare di k .

Problema 1.10

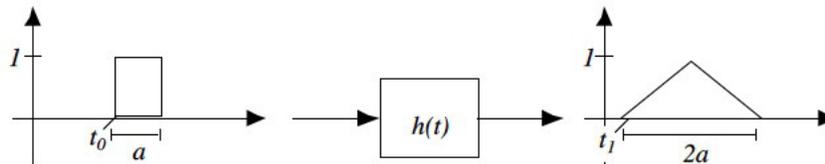
Si determini l'ampiezza della componente alla frequenza di 1 MHz del segnale in figura e se ne disegni il grafico al variare di a da 0 a $1\mu\text{s}$, mantenendo fissi gli estremi iniziale e finale dei due rettangoli in figura a 0 e $1\mu\text{s}$ rispettivamente.



Si calcoli poi la autocorrelazione del segnale.

Problema 1.11

Determinare la risposta impulsiva del filtro in figura, utilizzando le informazioni sulla forma d'onda in ingresso e in uscita. Calcolare inoltre l'uscita del blocco qualora ci sia in ingresso un gradino al tempo $t=5.78$ s da 0 a 1.37 V.



Problema 1.12

Si supponga che un sistema di misura, utilizzato per ottenere le funzioni di trasferimento di blocchi lineari incogniti, abbia fornito l'informazione che il blocco appena analizzato ha funzione di trasferimento pari a

$$H(f) = 10 \operatorname{sinc}^2(2f) e^{j4\pi f}.$$

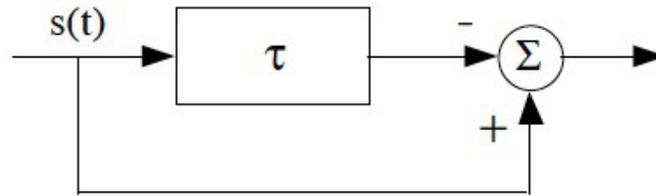
Calcolare l'uscita dello stesso blocco nei due casi in cui al suo ingresso ci sia:

- (a) una delta di Dirac centrata all'istante $t = 5$, cioè $s(t) = \delta(t - 5)$;
- (b) un segnale esponenziale complesso a frequenza $f_1 = 50$ Hz, cioè $s(t) = e^{j2\pi f_1 t}$.

Problema 1.13

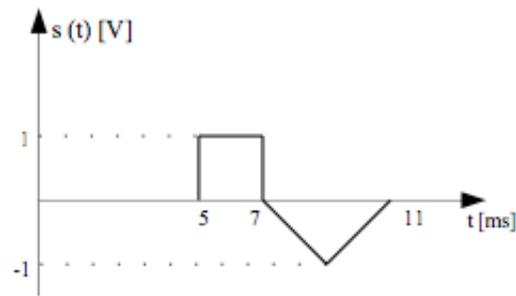
Determinare la funzione di trasferimento del sistema in figura in funzione del ritardo τ .

Dire anche per quali valori di τ la trasformata del segnale in uscita ha il valore (in modulo) più elevato, supponendo che $s(t)$ sia $\cos(2\pi f_0 t)$.



Problema 1.14

Dato il segnale in figura, con ampiezze in volt e tempi in millisecondi, scrivere l'espressione nel tempo di $s(t)$, l'espressione della sua trasformata $S(f)$ e calcolarne l'energia.



Il segnale precedente entra in un blocco con funzione di trasferimento:

$$H(f) = j f e^{j2\pi 8 \cdot 10^{-3} f}$$

che produce un nuovo segnale $r(t)$.

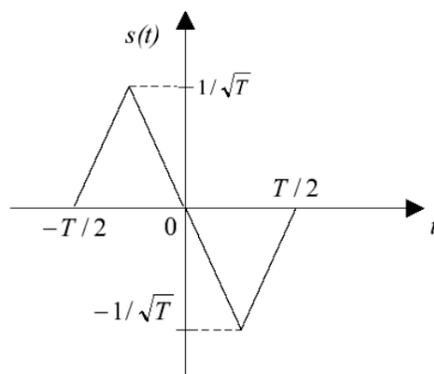
Determinare la risposta all'impulso del blocco e la trasformata del segnale in uscita $R(f)$.

Problema 1.15

Si consideri la forma d'onda $s(t)$ rappresentata in figura e si calcoli la sua trasformata di Fourier.

Si immagini poi di introdurre la $s(t)$ su un canale con funzione di trasferimento:

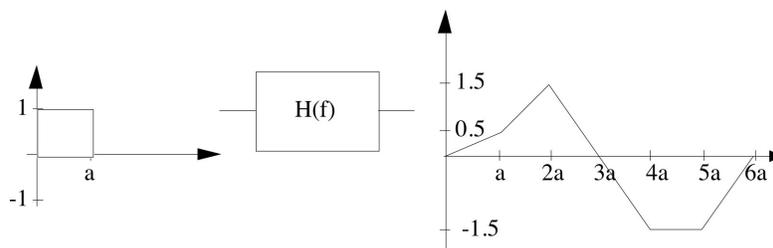
$$H(f) = \frac{\text{sinc}\left(\frac{fT}{2}\right)}{\text{sinc}^2\left(\frac{fT}{4}\right)} \cdot \frac{e^{-j\pi fT}}{j\pi fT}$$



e se ne calcoli l'espressione del segnale in uscita nel dominio del tempo.

Problema 1.16

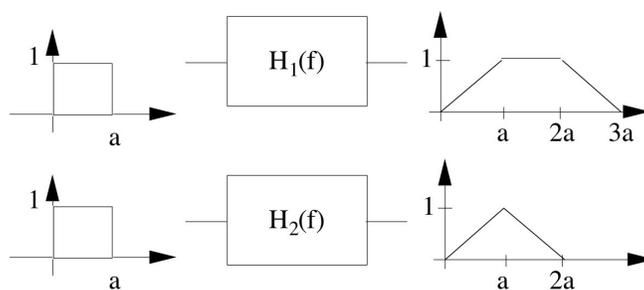
Si consideri il sistema in figura:



Si identifichi dapprima la sua risposta impulsiva e se ne calcoli poi la funzione di trasferimento.

Problema 1.17

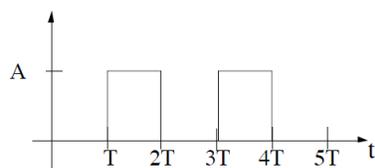
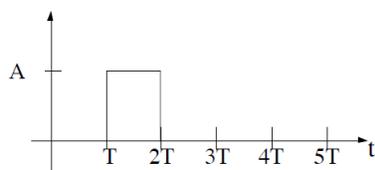
Si considerino i due blocchi in figura. Ciascun blocco può essere pensato come una approssimazione di un filtro passa basso. I due filtri però hanno banda diversa.



Quale dei due ha la banda più ampia?

Problema 1.18

Assumendo di considerare i segnali (ambedue periodici di periodo $5T$) rappresentati nelle figure seguenti, se ne calcoli e disegni la crosscorrelazione.



1.1 Soluzione dei problemi

Soluzione del problema 1.1

Un segnale PSK è un segnale che porta l'informazione binaria nella fase. Per esempio, possiamo assegnare al bit = 0 fase nulla, al bit = 1 fase uguale a π . Dunque:

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow +\cos 2\pi f_0 t \\ 1 &\rightarrow -\cos 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

La sequenza periodica ...010... è quindi rappresentata dal segnale in fig. 1.1.

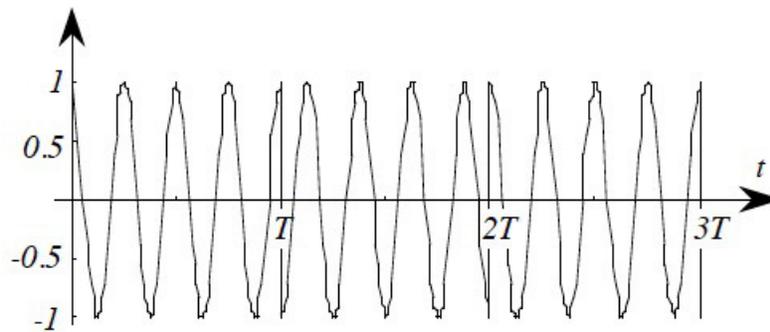


Figura 1.1 Segnale PSK "010".

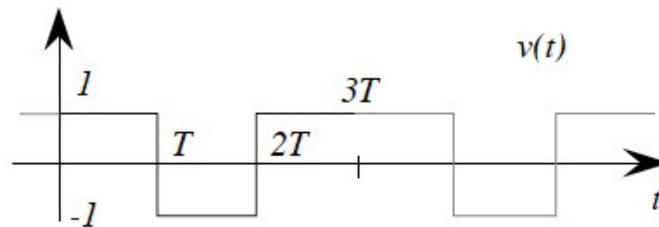


Figura 1.2 Il segnale $v(t)$.

Questo segnale può anche essere visto come il prodotto del $\cos 2\pi f_0 t$ con un segnale indicato come $v(t)$ (fig. 1.2), dove

$$v(t) = 1 - 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{t - 3nT - 1.5T}{T} \right).$$

Di conseguenza, $v(t)$ è esprimibile mediante una serie di Fourier di periodo $3T$.

Osservazione

È interessante osservare che la rappresentazione del segnale $v(t)$ indicata nella precedente espressione non è l'unica possibile. Ad esempio, si potrebbe scrivere

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-3nT}{2T}\right) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-3nT-1.5T}{T}\right)$$

Anche se a prima vista non sembrerebbe, i coefficienti delle serie di Fourier corrispondenti alle due diverse rappresentazioni sono uguali. La differenza sta nel fatto che la rappresentazione utilizzata permette di arrivare più rapidamente a questi coefficienti, perché si tratta di una costante più una serie di rettangoli, mentre nel caso qui sopra si tratta di due serie di rettangoli.

Lo spettro di $v(t) \cos 2\pi f_0 t$, secondo la formula di moltiplicazione di un segnale per un coseno, è formato da due copie dello spettro di $v(t)$, traslate una attorno a f_0 e una attorno a $-f_0$, con le righe di altezza dimezzata. Lo spettro è visibile nella figura successiva ed è rappresentabile in serie di Fourier (fig. 1.3)

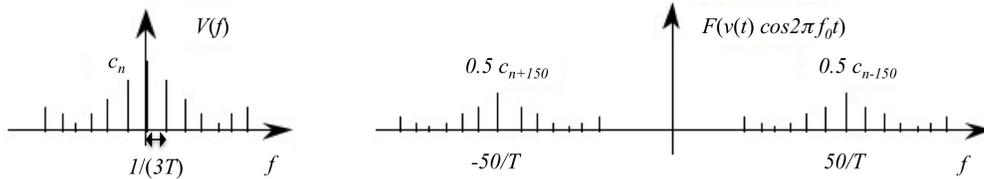


Figura 1.3 Spettro di $v(t)$ e di $v(t) \cos 2\pi f_0 t$

I coefficienti della serie di Fourier di $v(t)$, indicati con c_n , si ottengono da quelli della serie di rettangoli $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-3nT-1.5T}{T}\right)$, indicati con c_n^R , mediante la formula

$$\begin{aligned} c_n &= -2c_n^R \\ c_0 &= 1 - c_0^R \end{aligned}$$

e dunque valgono:

$$\begin{aligned} c_n &= -2 \frac{T}{3T} \text{sinc}\left(\frac{n}{3}\right) e^{-j2\pi \frac{3Tn}{6T}} = -\frac{2}{3} \text{sinc}\left(\frac{n}{3}\right) e^{-jn\pi} \\ c_0 &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda lo spettro di $v(t) \cos 2\pi f_0 t$, come visualizzato in fig. 1.3, la traslazione è di $50/T$, cioè di 150 volte la frequenza fondamentale di $v(t)$, che è pari all'inverso del suo periodo e quindi vale $1/(3T)$.

In questo caso, il segnale è ancora periodico con periodo $3T$ e il suo contributo a ciascuna frequenza è pari a

$$\frac{V\left(f + \frac{50}{T}\right) + V\left(f - \frac{50}{T}\right)}{2}$$

La componente in continua di questo spettro, cioè quella a frequenza 0, si calcola quindi come

$$\begin{aligned} \frac{V\left(\frac{50}{T}\right) + V\left(\frac{50}{T}\right)}{2} &= \frac{V\left(\frac{150}{3T}\right) + V\left(\frac{150}{3T}\right)}{2} = \frac{c_{150}}{2} + \frac{c_{-150}}{2} \\ &= -\frac{2}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{150}{3}\right) - \frac{2}{3} \operatorname{sinc}\left(\frac{-150}{3}\right) = 0 \end{aligned}$$

perchè la funzione $\operatorname{sinc}(x)$ si annulla quando l'argomento è un intero con segno.

Soluzione del problema 1.2

Il segnale complessivo è

$$s(t) = \left[A \cos 2\pi f_0 t + \frac{A}{20} \cos 2\pi f_1 t \right] w(t) = v(t)w(t)$$

ove $f_0 = 10$ kHz, $A = 10$ V, $f_1 = 50$ Hz e

$$w(t) = 1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{t - 999 \cdot 10^{-9} - n \cdot 1000 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-9}}\right)$$

dove si assume (arbitrariamente) che l'annullamento avvenga sempre alla fine di ogni intervallo di $1 \mu\text{s}$.

Dato che il periodo $T_0 = \frac{1}{f_0}$ vale $100 \mu\text{s}$ e che il periodo $T_1 = \frac{1}{f_1}$ vale 20 ms, il segnale $v(t)$ è periodico con periodo T_1 , ed il suo spettro sarà come in fig. 1.4.

In termini matematici:

$$V(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + \frac{A}{40} [\delta(f - f_1) + \delta(f + f_1)]$$

Visto che $s(t)$ è il prodotto di $v(t)$ e $w(t)$, il suo spettro $S(f)$ si ottiene dalla convoluzione di $V(f)$ e $W(f)$, quest'ultimo rappresentato in fig. 1.5 ed espresso come

$$\begin{aligned} W(f) &= \delta(f) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{n \cdot 2 \cdot 10^{-9}}{10^{-6}}\right) \frac{2 \cdot 10^{-9}}{10^{-6}} e^{-j2\pi n \frac{999 \cdot 10^{-9}}{10^{-6}}} \delta\left(f - \frac{n}{10^{-6}}\right) \\ &= \delta(f) - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{500} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{500}\right) e^{-j \frac{1.998n\pi}{1000}} \delta(f - n \cdot 10^6) \end{aligned}$$

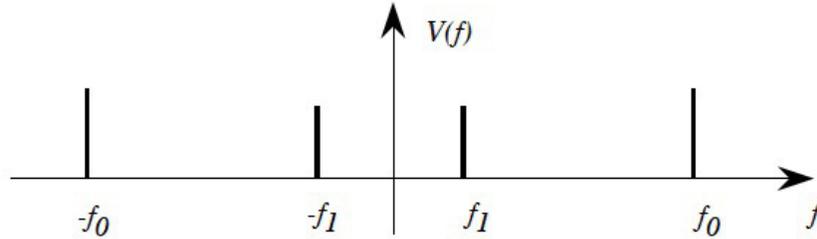


Figura 1.4 Spettro di $v(t)$.

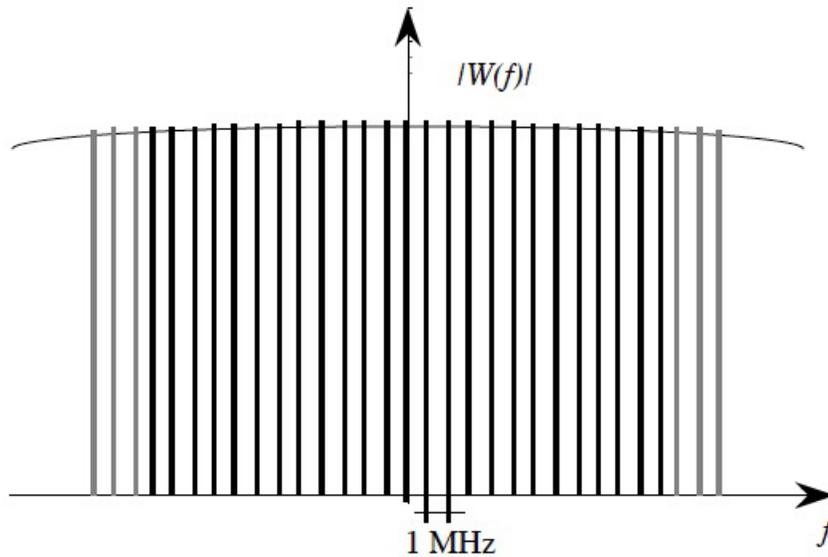


Figura 1.5 Spettro di $w(t)$.

Si nota che $W(f)$ ha un inviluppo che varia molto lentamente sulla scala dei MHz, mentre il segnale $v(t)$ ha uno spettro ristretto alla banda di qualche kHz.

Usando la proprietà relativa allo spettro di un segnale moltiplicato per un coseno e ricordando che $v(t) = A \cos 2\pi f_0 t + \frac{A}{20} \cos 2\pi f_1 t$, si può evitare di calcolare la convoluzione indicata più sopra, e si ottiene direttamente lo spettro $S(f)$ come

$$S(f) = A \frac{W(f - f_0)}{2} + A \frac{W(f + f_0)}{2} + A \frac{W(f - f_1)}{40} + A \frac{W(f + f_1)}{40}$$

Si noti che, dato che $f_0 \ll 1 \text{ MHz}$ e $f_1 \ll 1 \text{ MHz}$, nello spettro di $s(t)$ ad ogni componente di $W(f)$ si sostituiscono 4 componenti alte la metà di quelle di $S(f)$ nelle immediate vicinanze (assolutamente indistinguibili alla scala della figura precedente).

Soluzione del problema 1.3

Non avendo indicazioni sull'istante di inizio degli impulsi, si assume che il segnale $s(t)$ possa essere rappresentato come in fig. 1.6 ($T = 1\mu s$).

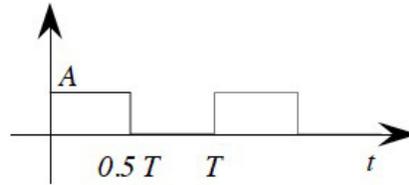


Figura 1.6 Il segnale $s(t)$.

Tale segnale, periodico, ha spettro del tipo

$$S(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

ove (si veda fig. 1.7)

$$c_n = A \frac{0.5T}{T} \operatorname{sinc}\left(\frac{n0.5T}{T}\right) e^{-j \frac{2\pi n}{T} \frac{T}{4}} = \frac{A}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) e^{-j \frac{\pi n}{2}}$$

Dunque

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{A}{2} \\ c_1 &= -j \frac{A}{2} \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = -j \frac{A}{\pi} = -c_{-1} \\ c_2 &= 0 = c_{-2} \\ c_3 &= j \frac{A}{2} \frac{1}{\frac{3\pi}{2}} = j \frac{A}{3\pi} = -c_{-3} \\ c_4 &= 0 = c_{-4} \\ c_5 &= \dots \end{aligned}$$

Se il filtro a cui $s(t)$ è in ingresso è un passabasso ideale con banda 1.1 MHz, passa solo la prima armonica, e dunque $y(t)$ (segnale in uscita) sarà

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{A}{2} - j \frac{A}{\pi} e^{j \frac{2\pi t}{T}} + j \frac{A}{\pi} e^{-j \frac{2\pi t}{T}} \\ &= \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \end{aligned}$$

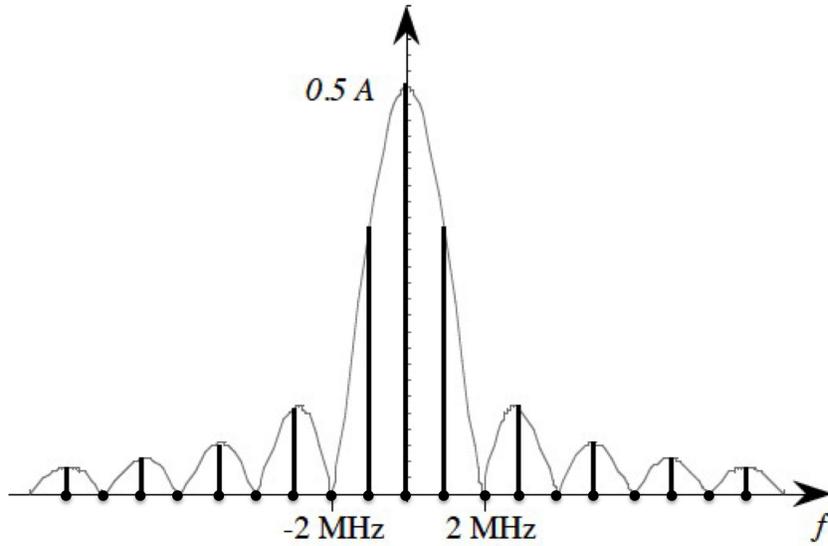


Figura 1.7 Spettro di $s(t)$

Se la banda è 2.04 MHz, $y(t)$ passa invariata, perché $c_2 = c_{-2} = 0$.

Se invece la banda è 3.5 MHz, il segnale risultante sarà

$$y_2(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} - \frac{2A}{3\pi} \sin \frac{6\pi t}{T}$$

Il disegno della $y(t)$ nei due casi indicati è riportato in fig. 1.8, dove può essere confrontato con il segnale originale.

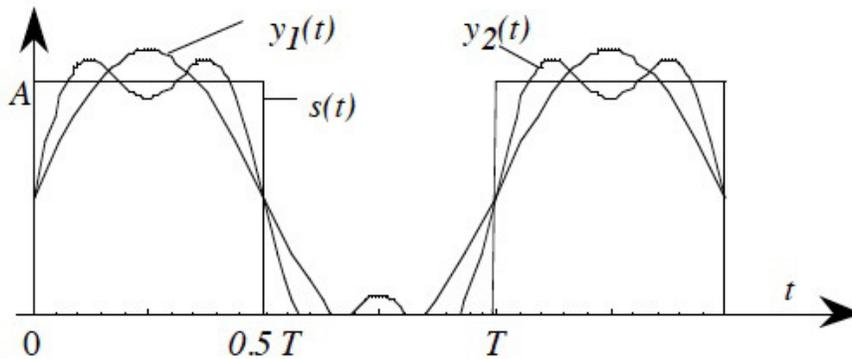


Figura 1.8 $s(t)$ e le sue approssimazioni $y_1(t)$ e $y_2(t)$.

Osservazione

È interessante osservare che, mentre il segnale originale in $t = 0.5 \mu\text{s}$ vale 0, sia il segnale $y_1(t)$ che il segnale $y_2(t)$ allo stesso istante valgono 0.5. Ciò è dovuto al fatto che $y_1(t)$ e $y_2(t)$ sono approssimazioni della funzione $s(t)$ con la somma di funzioni continue, mentre $s(t)$ ha una discontinuità proprio nel punto $t = 0.5 \mu\text{s}$.

Soluzione del problema 1.4

Detto $y(t)$ il segnale in uscita

$$y(t) = v(t) (\cos 2\pi f_0 t + \sin 2\pi f_0 t)$$

ove $v(t)$ è il segnale periodico ...0202... di periodo $4T_0$, pensabile anche come un segnale periodico ...02... di periodo $2T_0 = \frac{4\pi}{\omega_0} = \frac{2}{f_0}$.

Il segnale $v(t)$ è dunque rappresentabile in serie di Fourier, i cui coefficienti sono

$$c_n^v = 2 \frac{1}{2} \operatorname{sinc} \left(\frac{n}{2} \right) e^{-j \frac{2\pi n}{2T_0} \frac{3T_0}{2}} = \operatorname{sinc} \left(\frac{n}{2} \right) e^{-j \frac{3}{2} \pi n} \quad (1.1)$$

Dato che moltiplicare un segnale per un seno o un coseno significa traslarlo in frequenza, in questo caso lo spettro di $y(t)$ può essere ottenuto trasladando quello di $v(t)$ di un numero pari al rapporto tra la frequenza ω della sinusoide e la fondamentale di $v(t)$, pari a $\frac{\omega_0}{2} \left(2\pi \frac{1}{2T_0} \right)$.

In questo caso, il rapporto vale 2. Quindi, $y(t)$ ha dei coefficienti della serie di Fourier c_n^y pari a

$$\begin{aligned} c_n^y &= \frac{c_{n-2}^v}{2} + \frac{c_{n+2}^v}{2} + \frac{c_{n-2}^v}{2j} - \frac{c_{n+2}^v}{2j} \\ &= \frac{1}{2} \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{n-2}{2} \right) e^{-j \frac{3}{2} \pi (n-2)} + \operatorname{sinc} \left(\frac{n+2}{2} \right) e^{-j \frac{3}{2} \pi (n+2)} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2j} \left[\operatorname{sinc} \left(\frac{n-2}{2} \right) e^{-j \frac{3}{2} \pi (n-2)} - \operatorname{sinc} \left(\frac{n+2}{2} \right) e^{-j \frac{3}{2} \pi (n+2)} \right] \\ &= - \left[\frac{j+1}{2j} \operatorname{sinc} \left(\frac{n-2}{2} \right) + \frac{j-1}{2j} \operatorname{sinc} \left(\frac{n+2}{2} \right) \right] e^{-j \frac{3}{2} \pi n} \\ &= \left[\frac{j-1}{2} \operatorname{sinc} \left(\frac{n-2}{2} \right) - \frac{j+1}{2} \operatorname{sinc} \left(\frac{n+2}{2} \right) \right] e^{-j \frac{3}{2} \pi n} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda la correlazione, si ricordi che, per un segnale periodico,

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 e^{j \frac{2\pi n \tau}{2T_0}}$$

Detti

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{sinc}\left(\frac{n-2}{2}\right) \\ b &= \operatorname{sinc}\left(\frac{n-2}{2}\right) \end{aligned}$$

si ha dunque che:

$$\begin{aligned} |c_n|^2 &= \left[\frac{j-1}{2} a - \frac{j+1}{2} b \right] \cdot \left[\frac{-j-1}{2} a - \frac{-j+1}{2} b \right] \\ &= \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} b^2 \end{aligned}$$

da cui, infine, si ricava che

$$\begin{aligned} R_y(\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left[\operatorname{sinc}^2\left(\frac{n-2}{2}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{n+2}{2}\right) \right] e^{j\frac{\pi n\tau}{T_0}} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left[\operatorname{sinc}^2\left(\frac{2m-3}{2}\right) + \operatorname{sinc}^2\left(\frac{2m+1}{2}\right) \right] e^{j\frac{\pi(2m-1)\tau}{T_0}} \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che per $n = 2m$, cioè n pari, gli argomenti delle sinc si annullano, quindi nella formula si sono considerati solo i valori di n dispari (cioè uguali a $2m-1$).

Soluzione del problema 1.5

Il segnale in uscita dal circuito vale

$$y(t) = s(t) \cos \omega t + \cos \omega t$$

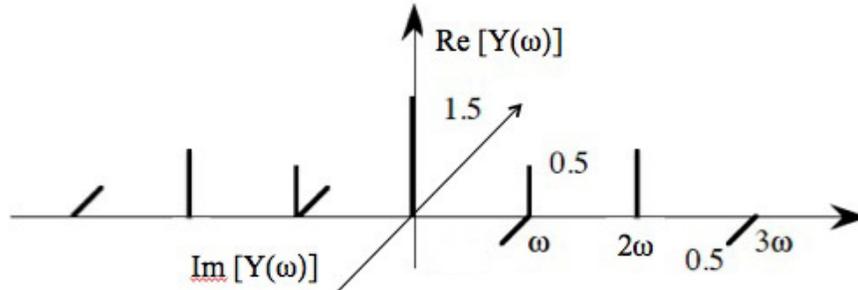
nel caso $s(t) = 3 \cos 2\pi f t + 2 \sin 4\pi f t$, se $\omega = 2\pi f$,

$$\begin{aligned} y(t) &= 3 \cos^2 \omega t + 2 \sin 2\omega t \cos \omega t + \cos \omega t \\ &= \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cos 2\omega t + \sin 3\omega t + \sin \omega t + \cos \omega t \end{aligned}$$

dove si sono sfruttate le formule

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Lo spettro di $y(t)$ è rappresentato in fig. 1.9.


Figura 1.9

Per calcolare la cross-correlazione si può usare la forma diretta dell'integrale di correlazione per segnali periodici di periodo T

$$R_{sy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s(t)y(t+\tau) dt$$

Alternativamente, e più facilmente in questo caso, si può ricavare $R_{sy}(\tau)$ dalla sua relazione con la densità spettrale di potenza. Perciò:

$$R_{sy}(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^y c_n^{s*} e^{j\frac{2\pi n}{T}\tau}$$

dove c_n^s e c_n^y sono i coefficienti della serie di Fourier rispettivamente di $s(t)$ e $y(t)$, e $*$ rappresenta il complesso coniugato.

Nonostante in teoria questi coefficienti vadano calcolati per ogni n , nel nostro caso solo alcuni di essi sono diversi da zero, e precisamente:

$$\begin{aligned} c_0^y &= \frac{3}{2} \\ c_1^y &= \frac{1-j}{2} & c_{-1}^y &= \frac{1+j}{2} \\ c_2^y &= \frac{3}{4} = c_{-2}^y \\ c_3^y &= -\frac{j}{2} & c_{-3}^y &= \frac{j}{2} \\ c_1^s &= \frac{3}{2} = c_{-1}^s \\ c_2^s &= \frac{1}{j} = -c_{-2}^s \end{aligned}$$

Se ne ricava che

$$R_{sy}(\tau) = \frac{3}{2}(\cos \omega\tau + \sin \omega\tau) - \frac{3}{2} \sin 2\omega\tau$$

che, come ci si aspetta dalla teoria, è un segnale periodico nella variabile τ , con lo stesso periodo T del segnale originale.

Osservazione

Usando la formula diretta della cross-correlazione, ci si ritrova con dieci termini

- 1) $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 3 \cos \omega t \frac{3}{2} dt$
- 2) $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 3 \cos \omega t \frac{3}{2} \cos 2\omega(t + \tau) dt$
- 3) $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 3 \cos \omega t \sin 3\omega(t + \tau) dt$
- 4) $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 3 \cos \omega t \sin \omega(t + \tau) dt$
- 5) $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 3 \cos \omega t \cos \omega(t + \tau) dt$
- 6) $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 3 \sin 2\omega t dt$
- 7) $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 3 \sin 2\omega t \cos 2\omega(t + \tau) dt$
- 8) $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2 \sin 2\omega t \sin 3\omega(t + \tau) dt$
- 9) $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2 \sin 2\omega t \sin \omega(t + \tau) dt$
- 10) $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} 2 \sin 2\omega t \cos \omega(t + \tau) dt$

Sfruttando le formule di cui sopra e il fatto che

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{2}, \end{aligned}$$

gli integrali si possono riscrivere come

- 1) $\frac{9}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega t \, dt$
- 2) $\frac{9}{4T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega(3t + 2\tau) + \cos \omega(t + 2\tau) \, dt$
- 3) $\frac{3}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega(4t + 3\tau) + \sin \omega(2t + 3\tau) \, dt$
- 4) $\frac{3}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega\tau + \sin \omega(2t + \tau) \, dt$
- 5) $\frac{3}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega\tau + \cos \omega(2t + \tau) \, dt$
- 6) $\frac{3}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin 2\omega t \, dt$
- 7) $\frac{3}{2T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega(4t + \tau) - \sin \omega 2\tau \, dt$
- 8) $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega(5t + 3\tau) + \sin \omega(t - 3\tau) \, dt$
- 9) $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos \omega(3t + \tau) + \cos \omega(t - \tau) \, dt$
- 10) $\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin \omega(3t + \tau) + \sin \omega(t - \tau) \, dt$

Ricordando che l'integrale di un seno e di un coseno su un periodo o un multiplo del suo periodo vale 0, tutti i termini degli integrali 1), 2), 3), 6), 8), 9) e 10) sono nulli, lasciandoci quindi con i tre integrali

- 4) $\frac{3}{2} \sin \omega\tau$
- 5) $\frac{3}{2} \cos \omega\tau$
- 7) $-\frac{3}{2} \sin 2\omega\tau$

Soluzione del problema 1.6

Il segnale in figura può essere scritto come

$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{t - t_0 - 0.5a}{a}\right) + \text{rect}\left(\frac{t - t_0 - 3a}{2a}\right)$$

Il suo spettro è dunque

$$\begin{aligned} S(f) &= a \text{sinc } fa e^{-j2\pi f(t_0+0.5a)} + 2a \text{sinc } 2fa e^{-j2\pi f(t_0+0.5a)} e^{-j2\pi f2.5a} \\ &= a e^{-j2\pi f(t_0+0.5a)} \left[\text{sinc } fa + 2e^{-j5\pi fa} \text{sinc } 2fa \right] \end{aligned}$$

La sua autocorrelazione si può calcolare direttamente nel tempo, oppure calcolando la antitrasformata di $|S(f)|^2 = S(f) * S^*(f)$.

$$|S(f)|^2 = a^2 \left[\text{sinc}^2 fa + 4 \text{sinc}^2 2fa + 2 \text{sinc } fa \text{sinc } 2fa \left(e^{j5\pi fa} + e^{-j5\pi fa} \right) \right]$$

I primi due termini sono l'autocorrelazione del 1° e del 2° impulso, mentre il terzo tiene conto delle interazioni.

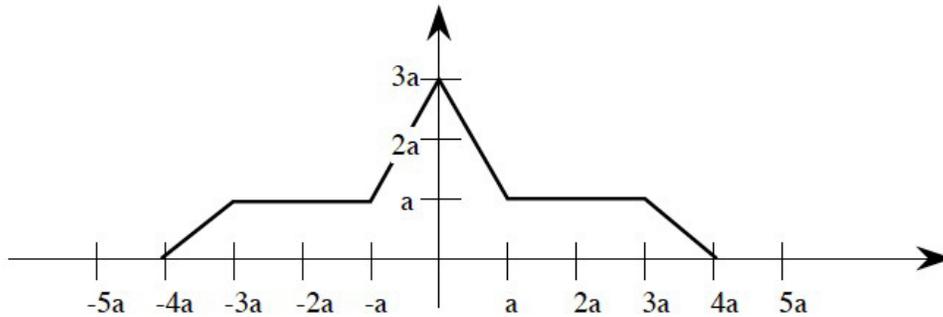


Figura 1.10 Autocorrelazione del segnale $s(t)$

Perciò, la antitrasformata di $|S(f)|^2$ è costituita da

1. l'antitrasformata di $a^2 \text{sinc}^2 fa$, cioè un triangolo isoscele di base $2a$ centrato in 0 e con altezza massima a (la autocorrelazione del primo impulso);
2. l'antitrasformata di $4a^2 \text{sinc}^2 2fa$, cioè un triangolo isoscele centrato ancora in 0, con base $4a$ ed altezza massima $2a$ (la autocorrelazione del secondo impulso);

3. un ulteriore termine ottenibile da:

$$\begin{aligned}
 I(f) &= a^2 \operatorname{sinc} fa \operatorname{sinc} 2fa \left(e^{j5\pi fa} + e^{-j5\pi fa} \right) \\
 &= a^2 2 \operatorname{sinc} fa \frac{\sin \pi 2fa}{2\pi fa} \left(e^{j5\pi fa} + e^{-j5\pi fa} \right) \\
 &= a^2 2 \operatorname{sinc} fa \operatorname{sinc} fa \cos \pi fa \left(e^{j5\pi fa} + e^{-j5\pi fa} \right) \\
 &= a^2 \operatorname{sinc}^2 fa \left(e^{j6\pi fa} + e^{j4\pi fa} + e^{-j4\pi fa} + e^{-j6\pi fa} \right)
 \end{aligned}$$

La antitrasformata di questo termine corrisponde a 4 triangoli isosceli di base $2a$ e altezza a centrati in $-3a$, $-2a$, $2a$ e $3a$. La sovrapposizione di tutti questi termini e di quelli precedentemente calcolati produce il grafico complessivo della autocorrelazione di $s(t)$, riportato in fig. 1.10.

Osservazione

Ovviamente lo stesso risultato si otterrebbe anche calcolando la autocorrelazione direttamente.

Chiamando $v_1(t)$ un rettangolo di altezza unitaria, durata a e con inizio all'istante t_0 e $v_2(t)$ un rettangolo di altezza unitaria, durata $2a$ e con inizio nello stesso istante, il segnale $s(t)$ può essere riscritto come:

$$s(t) = v_1(t) + v_2(t - 2a)$$

In questo caso la autocorrelazione di $s(t)$ si calcola come

$$\begin{aligned}
 R_s(\tau) &= \int (v_1(t) + v_2(t - 2a)) (v_1(t - \tau) + v_2(t - 2a - \tau)) dt \\
 &= \int v_1(t) v_1(t - \tau) dt + \int v_2(t - 2a) v_1(t - \tau) dt \\
 &\quad + \int v_1(t) v_2(t - 2a - \tau) dt + \int v_2(t - 2a) v_2(t - 2a - \tau) dt
 \end{aligned}$$

Il primo termine di questa somma è l'autocorrelazione di $v_1(t)$, il quarto termine l'autocorrelazione di $v_2(t)$, mentre il secondo e il terzo termine sono le correlazioni incrociate.

In particolare:

1. il primo termine (l'autocorrelazione di un rettangolo di altezza unitaria e durata a) è quindi un triangolo isoscele di base $2a$, centrato nell'origine e di altezza pari a a ;
2. il quarto termine (l'autocorrelazione di un rettangolo di altezza unitaria e durata $2a$) è quindi un triangolo isoscele di base $4a$, centrato nell'origine e di altezza pari a $2a$;

3. l' correlazione incrociata (*cross-correlazione*) tra $v_1(t)$ e $v_2(t)$ è la correlazione tra due rettangoli, cioè un trapezio isoscele di altezza pari a a , base maggiore pari a $3a$, base minore pari a a e centrato nella distanza tra i due segnali, che è pari a $2a$;
4. l'autocorrelazione incrociata tra $v_2(t)$ e $v_1(t)$ è uguale a quella del punto precedente con $-\tau$ al posto di τ , quindi è un trapezio isoscele di altezza a , base maggiore $3a$ e base minore a , centrato in $-2a$.

È facile vedere che la somma dei quattro termini appena elencati fornisce lo stesso grafico di fig. 1.10.

Soluzione del problema 1.7

Il segnale $s(t)$ in figura può essere scritto come

$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) + \text{rect}\left(\frac{t - (T + \tau + \frac{T}{2})}{T}\right)$$

Di conseguenza, lo spettro di $s(t)$ è esprimibile come

$$\begin{aligned} S(f) &= T \text{sinc} fT e^{-j\frac{2\pi fT}{2}} + T \text{sinc} fT e^{-j2\pi f(\frac{3}{2}T + \tau)} \\ &= 2T \text{sinc} fT e^{-j2\pi f(T + \frac{\tau}{2})} \left[\frac{e^{-j2\pi f(-\frac{T}{2} - \frac{\tau}{2})} + e^{-j2\pi f(\frac{T}{2} + \frac{\tau}{2})}}{2} \right] \\ &= 2T \text{sinc} fT e^{-j2\pi f(T + \frac{\tau}{2})} \cos \pi f(T + \tau) \end{aligned}$$

Per calcolare l'autocorrelazione di $s(t)$ è opportuno definire

$$v(t) = \text{rect}\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right)$$

e riscrivere

$$s(t) = v(t) + v[t - (T + \tau)]$$

In questo caso, detta

$$R_v(\bar{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)v(t - \bar{t}) dt$$

l'autocorrelazione di $v(t)$, si ha che

$$\begin{aligned}
 R_s(\bar{t}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s(t-\bar{t}) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{v(t) + v[t-(T+\tau)]\} \{v(t-\bar{t}) + v[t-(\bar{t}+T+\tau)]\} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)v(t-\bar{t}) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)v[t-(\bar{t}+T+\tau)] dt \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} v[t-(T+\tau)]v(t-\bar{t}) dt \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{+\infty} v[t-(T+\tau)]v[t-(\bar{t}+T+\tau)] dt \\
 &= R_v(\bar{t}) + R_v(\bar{t}+T+\tau) + R_v(\bar{t}-T-\tau) + R_v(\bar{t}) \\
 &= 2R_v(\bar{t}) + R_v(\bar{t}+T+\tau) + R_v(\bar{t}-T-\tau)
 \end{aligned}$$

Essendo dunque $R_v(\bar{t})$ della forma in fig. 1.11, $R_s(\bar{t})$ sarà come in fig. 1.12.

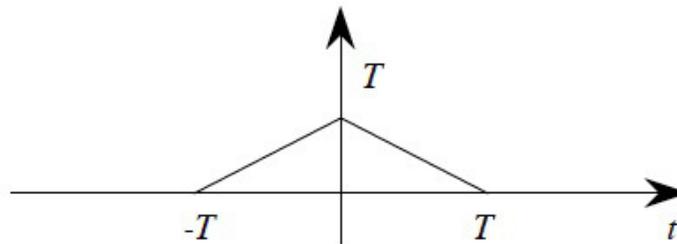


Figura 1.11 La funzione $R_v(\bar{t})$.

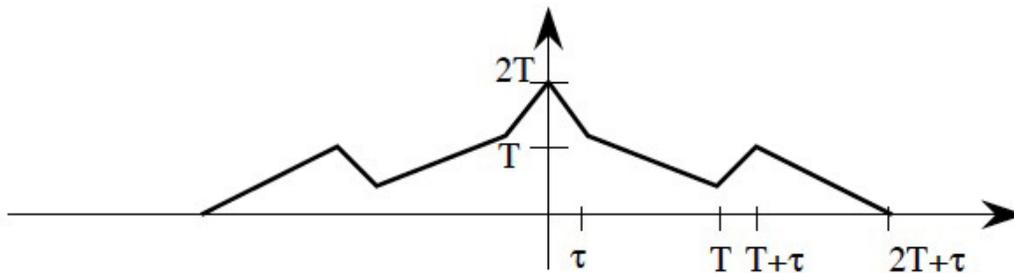


Figura 1.12 La funzione $R_s(\bar{t})$.

Soluzione del problema 1.8

Il segnale $s(t)$ è costituito dal prodotto del segnale $m(t) = 300 \operatorname{sinc} 2100t$ e del $\sin 2\pi f_1 t$ ove $f_1 = 15$ kHz.

Il suo spettro è quindi pari allo spettro di $m(t)$, ma alto la metà e centrato attorno a f_1 e $-f_1$. Essendo

$$M(f) = \frac{300}{2100} \operatorname{rect} \left(\frac{f}{2100} \right) = \frac{1}{7} \operatorname{rect} \left(\frac{f}{2100} \right)$$

se ne deduce che $S(f)$ ha la forma in fig. 1.13.

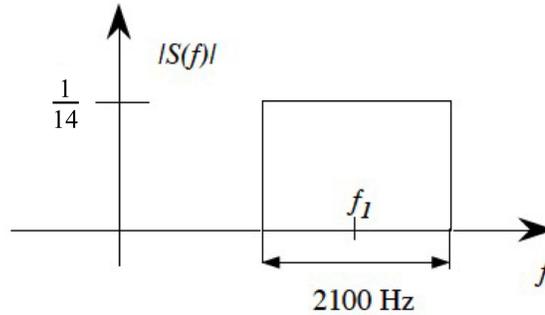


Figura 1.13 Lo spettro del segnale $s(t)$.

Di conseguenza, il filtro passabanda ideale richiesto dal problema deve essere centrato in f_1 e largo $2B$, ove B è determinato dalla condizione

$$2 \int_{f_1-B/2}^{f_1+B/2} |S(f)|^2 df = 0.9 \cdot 2 \int_{f_1-1050}^{f_1+1050} |S(f)|^2 df$$

da cui, tenendo conto che $|S(f)|^2$ è costante e pari a $\frac{1}{196}$ nella banda di interesse,

$$\frac{B}{196} = 0.9 * \frac{2100}{196}$$

e quindi $B = 0.9 * 2100 = 1890$ Hz.

Soluzione del problema 1.9

Il segnale presentato dal problema può essere scomposto nella somma di due segnali:

Essendo quindi:

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) = \operatorname{rect} \left(\frac{t - \frac{3}{2}a}{3a} \right) - \operatorname{triang} \left(\frac{t - (2a - k)}{2a} \right)$$

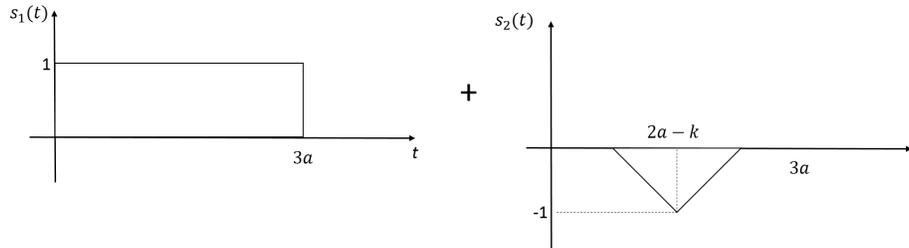


Figura 1.14 La scomposizione del segnale presentato dal problema.

Lo spettro di $s(t)$ risulta essere:

$$S(f) = 1 \cdot 3a \operatorname{sinc}(f3a)e^{-j2\pi f \frac{3}{2}a} - 1 \cdot \frac{2a}{2} \operatorname{sinc}^2\left(f \frac{2a}{2}\right) e^{-j2\pi f(2a-k)}$$

$$S(f) = 3a \operatorname{sinc}(f3a)e^{-j2\pi f \frac{3}{2}a} - a \operatorname{sinc}^2(fa)e^{-j2\pi f(2a-k)}$$

Lo spettro in $f = 0$ ed $f = \frac{1}{a}$ vale:

$$S(0) = 3a - a = 2a \quad \forall k$$

$$S\left(\frac{1}{a}\right) = 3a \cdot 0 - a \cdot 0 = 0 \quad \forall k$$

Per quanto riguarda il calcolo dell'energia di $s(t)$, risulta evidente che il suo valore non dipende dalle variazioni di k . Perciò, al fine di calcolarla più agevolmente, è preferibile scomporre il segnale originale in una maniera diversa rispetto alla figura precedente, come rappresentato in figura 1.15.

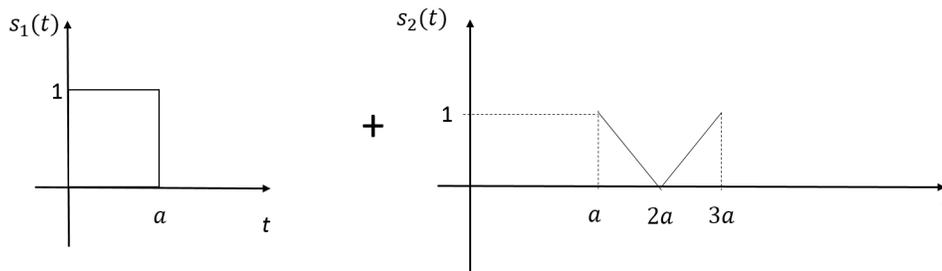


Figura 1.15 Una scomposizione alternativa del segnale presentato dal problema, più facile da analizzare per il calcolo dell'energia del segnale stesso.

Osservazione

Per calcolare l'energia di un segnale è spesso preferibile scomporlo come somma di segnali più semplici la cui cross-correlazione è nulla, ad esempio perché sono diversi da zero su intervalli distinti. Infatti, in questo caso

$$\int (s_1(t) + s_2(t))^2 dt = \int s_1(t)^2 dt + \int s_2(t)^2 dt + 2 \int s_1(t)s_2(t) dt = E_1 + E_2$$

Secondo questa nuova scomposizione, l'energia complessiva del segnale è la somma delle energie dei due segnali indicati in figura e quindi

$$\begin{aligned} E_s &= E_{s_1} + E_{s_2} \\ E_{s_1} &= a \cdot 1^2 = a \end{aligned}$$

Il calcolo dell'energia di $s_2(t)$ può essere semplificato considerando che $E_{s_2} = 2E_{s_3}$, dove $s_3(t)$ è il segnale mostrato in figura 1.16.

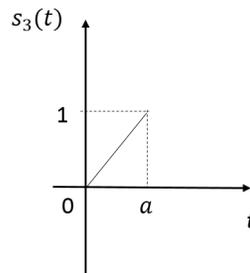


Figura 1.16 Il segnale $s_3(t)$.

$$E_{s_2} = 2 \int_0^a \left(\frac{t}{a}\right)^2 dt = \frac{2}{a^2} \frac{t^3}{3} \Big|_0^a = \frac{2}{3}a$$

Il risultato finale è quindi:

$$E_s = a + \frac{2}{3}a = \frac{5}{3}a.$$

Soluzione del problema 1.10

Come si deduce dalla figura fornita, $s(t)$ si può pensare come la somma dei due termini

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \text{rect}\left(\frac{t - 0.5 \cdot 10^{-6}}{10^{-6}}\right) \\ s_2(t) &= -\text{rect}\left(\frac{t - 0.5 \cdot 10^{-6}}{a}\right). \end{aligned}$$

Perciò

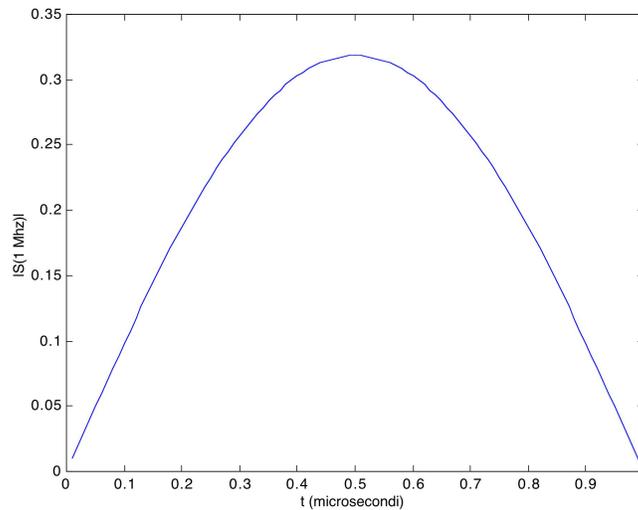
$$S(f) = [10^{-6} \operatorname{sinc}(f 10^{-6}) - a \operatorname{sinc}(fa)] e^{-j\pi f 10^{-6}}.$$

La componente a frequenza 1MHz = 10^6 Hz sarà dunque

$$S(10^6) = [10^{-6} \operatorname{sinc}(1) - a \operatorname{sinc}(10^6 a)] e^{-j\pi}$$

e, ricordando, che $\operatorname{sinc}(1) = 0$, l'ampiezza richiesta sarà $|S(10^6)| = 10^{-6} a \operatorname{sinc}(10^6 a)$, con $0 \leq a \leq 10^{-6}$.

Il grafico corrispondente di questa quantità in funzione di a sarà dunque:



Osservazione

Si noti che il contributo a frequenza 1 MHz si annulla per $a = 0$ perché in quel caso il secondo termine della trasformata scompare e il primo termine, cioè $10^{-6} \operatorname{sinc}(f 10^{-6}) e^{j2\pi f 10^{-6}}$, si annulla (la sinc diventa $\operatorname{sinc}(1)$) alla frequenza di 1 MHz.

Inoltre, e più banalmente, il contributo a frequenza 1 MHz si annulla anche quando $a = 1 \mu\text{s}$, perché in quel caso i due termini della trasformata sono uguali ed opposti.

Per quanto riguarda la autocorrelazione del segnale, si ricorda che (essendo il segnale aperiodico):

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)s(t+\tau) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (s_1(t) + s_2(t))(s_1(t+\tau) + s_2(t+\tau)) dt.$$

Svolgendo i calcoli, si ottiene

$$\begin{aligned}
 R(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2(t+\tau) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t)s_2(t+\tau) dt \\
 &+ \int_{-\infty}^{+\infty} s_1(t)s_2(t+\tau) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} s_2(t)s_1(t+\tau) dt \\
 &= R_1(\tau) + R_2(\tau) + R_{12}(\tau) + R_{21}(\tau).
 \end{aligned}$$

Tenendo conto che

1. la autocorrelazione di un segnale rettangolare corrisponde ad un triangolo isoscele, centrato in 0, di base pari al doppio della durata del segnale rettangolare e altezza pari alla sua energia,
2. la crosscorrelazione tra due segnali rettangolari corrisponde ad un trapezio, centrato nella differenza tra i centri dei due segnali rettangolari, base maggiore pari alla somma delle durate e base minore pari alla loro differenza e altezza pari all'area della loro massima sovrapposizione,

la autocorrelazione del segnale di partenza sarà dunque la somma delle seguenti quattro funzioni:

- un triangolo centrato in 0, base $2\mu s$ e altezza 10^{-6} ;
- un triangolo centrato in 0, base $2a$ e altezza a ;
- un trapezio centrato in 0, base maggiore $a + 1\mu s$ e altezza a ;
- infine, un altro trapezio centrato in 0, base maggiore $a + 1\mu s$, base minore $1\mu - as$ e altezza a .

Soluzione del problema 1.11

La forma d'onda di ingresso è un impulso di altezza 1 e durata a . Detto t_0 l'istante iniziale dell'impulso

$$x(t) = \text{rect}\left(\frac{t - t_0 - 0.5a}{a}\right)$$

La forma d'onda in uscita invece è un triangolo isoscele d'altezza 1 e durata $2a$. Detto t_1 l'istante iniziale del triangolo

$$y(t) = \text{triang}\left(\frac{t - t_1 - a}{2a}\right)$$

La funzione di trasferimento del blocco in mezzo si può calcolare come

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{a \text{sinc}^2 af e^{-j2\pi f(t_1+a)}}{a \text{sinc} af e^{-j2\pi f(t_0+0.5a)}} = \text{sinc} af e^{-j2\pi f(t_1-t_0+0.5a)}$$

Perciò

$$h(t) = \frac{1}{a} \operatorname{rect} \left(\frac{t - t_1 + t_0 - 0.5a}{a} \right)$$

Se adesso poniamo in ingresso un gradino da 0 a 1.37 V al tempo $t = 5.78$, in uscita ci sarà

$$\begin{aligned} & F^{-1} \left(\operatorname{sinc} af e^{-j2\pi f(t_1 - t_0 + 0.5a)} \frac{1.37}{j2\pi f} e^{-j2\pi f 5.78} \right) \\ &= 1.37 \int_{-\infty}^t \frac{1}{a} \operatorname{rect} \left(\frac{\tau - t_1 + t_0 - 0.5a - 5.78}{a} \right) d\tau \end{aligned}$$

dove il gradino unitario $u(t)$ è considerato come $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$ e quindi $U(f) = \frac{1}{j2\pi f}$.

Soluzione del problema 1.12

L'uscita del blocco $H(f)$, quando in ingresso $s(t) = \delta(t - 5)$, si ottiene considerando che

$$S(f) = e^{-j2\pi f 5}$$

In questo caso, l'uscita del blocco sarà quindi:

$$V(f) = H(f)S(f) = 10 \operatorname{sinc}^2(2f) e^{j2\pi f(2-5)} = 10 \operatorname{sinc}^2(2f) e^{-j2\pi f 3}$$

Nel dominio del tempo:

$$v(t) = 5 \operatorname{triang} \left(\frac{t - 3}{4} \right)$$

Se invece l'ingresso del sistema è $s(t) = e^{j2\pi f_1 t}$:

$$\begin{aligned} S(f) &= \delta(f - f_1) \\ V(f) &= \delta(f - f_1) \cdot 10 \operatorname{sinc}^2(2f) e^{j2\pi f 2} \\ v(t) &= \int \delta(f - f_1) \cdot 10 \operatorname{sinc}^2(2f) e^{j2\pi f 2} \cdot e^{j2\pi f t} df \\ &= 10 \operatorname{sinc}^2(2f_1) e^{j2\pi f_1(t+2)} \end{aligned}$$

Nel caso in cui $f_1 = 50$ Hz, $v(t) = 0$ perché $\operatorname{sinc}^2(100) = 0$.

Osservazione

Si noti che lo stesso risultato si può ottenere anche nel dominio del tempo:

$$\begin{aligned} v(t) = s(t) * h(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t - \tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi f_1(t-\tau)}h(\tau)d\tau \\ &= e^{j2\pi f_1 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi f_1 \tau} d\tau = e^{j2\pi f_1 t} H(f_1) \end{aligned}$$

Soluzione del problema 1.13

Il segnale in uscita dal circuito in figura è

$$s(t) - s(t - \tau) = v(t)$$

In questo caso $\frac{V(f)}{S(f)}$ è la funzione di trasferimento del sistema.
Perciò (fig. 1.17)

$$H(f) = \frac{S(f) - S(f) e^{-j2\pi f\tau}}{S(f)} = 1 - e^{-j2\pi f\tau} = 2je^{-j\pi f\tau} \sin \pi f\tau$$

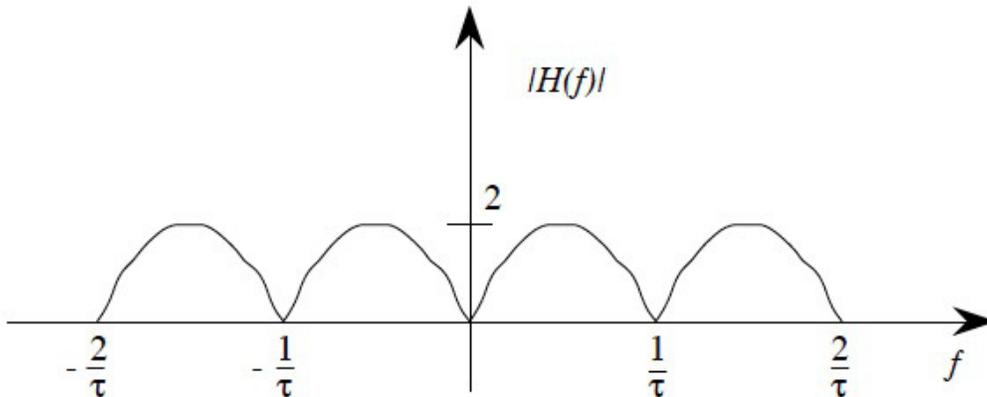


Figura 1.17 Modulo della funzione di trasferimento del sistema.

Se in ingresso abbiamo $s(t) = \cos 2\pi f_0 t$, in uscita ci sarà $\cos 2\pi f_0 t - \cos 2\pi f_0(t - \tau)$, la cui trasformata è

$$\begin{aligned} V(f) &= \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] 2j e^{-j\pi f \tau} \sin \pi f \tau \\ &= j \left[\delta(f - f_0) e^{-j\pi f_0 \tau} \sin \pi f_0 \tau + \delta(f + f_0) e^{-j\pi(-f_0)\tau} \sin \pi(-f_0)\tau \right] \\ &= j \sin \pi f_0 \tau \left[\delta(f - f_0) e^{-j\pi f_0 \tau} - \delta(f + f_0) e^{j\pi f_0 \tau} \right] \end{aligned}$$

$|V(f)|$ è massimo se $\sin \pi f_0 \tau = 1$, cioè

$$\pi f_0 \tau = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \implies \tau = \frac{2n + 1}{2f_0}$$

Nel caso $n = 0$ e quindi $\tau = \frac{1}{2f_0}$, si ha

$$\begin{aligned} V(f) &= j\delta(f - f_0) e^{-j\frac{\pi}{2}} - j\delta(f + f_0) e^{j\frac{\pi}{2}} \\ &= j\delta(f - f_0)(-j) - j\delta(f + f_0)j \\ v(t) &= 2 \cos 2\pi f_0 t \end{aligned}$$

Osservazione

L'ultimo risultato si può dimostrare anche nel dominio del tempo. Infatti l'uscita vale, come detto, $\cos 2\pi f_0 t - \cos 2\pi f_0(t - \tau)$. Se $\tau = \frac{1}{2f_0}$, si ha dunque

$$v(t) = \cos 2\pi f_0 t - \cos 2\pi f_0 \left(t - \frac{1}{2f_0}\right) = \cos 2\pi f_0 t - \cos(2\pi f_0 t - \pi) = 2 \cos 2\pi f_0 t$$

Soluzione del problema 1.14

Il segnale $s(t)$ può essere visto come la somma di un rettangolo e di un triangolo, entrambi traslati nel tempo:

$$s(t) = \text{rect} \left(\frac{t - 6 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \right) - \text{triang} \left(\frac{t - 9 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 10^{-3}} \right)$$

Sfruttando la linearità della trasformata di Fourier:

$$S(f) = 2 \cdot 10^{-3} \text{sinc}(f \cdot 2 \cdot 10^{-3}) e^{-j2\pi f 6 \cdot 10^{-3}} - 2 \cdot 10^{-3} \text{sinc}^2(f \cdot 2 \cdot 10^{-3}) e^{-j2\pi f 9 \cdot 10^{-3}}$$

L'energia può essere calcolata come somma dell'energia dei due segnali componenti, dal momento che la loro cross-correlazione è nulla.

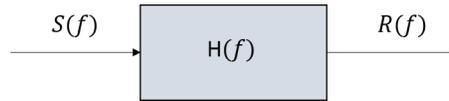
L'energia della componente rettangolare è data da:

$$E_1 = \int_{5 \cdot 10^{-3}}^{7 \cdot 10^{-3}} 1^2 dt = 2 \cdot 10^{-3} \text{ W}$$

Mentre l'energia del triangolo può essere calcolata come il doppio dell'integrale del quadrato del segnale rappresentato in figura 1.16, ponendo $a = 2 \cdot 10^{-3}$, corrispondente a metà della durata del triangolo:

$$E_2 = 2 \int_0^{2 \cdot 10^{-3}} \left(\frac{t}{2 \cdot 10^{-3}} \right)^2 dt = \frac{2}{4 \cdot 10^{-6}} \frac{t^3}{3} \Big|_0^{2 \cdot 10^{-3}} = \frac{4}{3} \text{ mW}$$

$$E = E_1 + E_2 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3} \text{ mW}$$



La trasformata di Fourier del segnale in uscita dal blocco rappresentato in figura è data da:

$$R(f) = H(f)S(f)$$

$$R(f) = jf e^{j2\pi 8 \cdot 10^{-3} f} \left(2 \cdot 10^{-3} \text{sinc}(f \cdot 2 \cdot 10^{-3}) e^{-j2\pi f 6 \cdot 10^{-3}} - 2 \cdot 10^{-3} \text{sinc}^2(f \cdot 2 \cdot 10^{-3}) e^{-j2\pi f 9 \cdot 10^{-3}} \right)$$

La risposta impulsiva $h(t)$ può essere calcolata come antitrasformata di Fourier di $H(f)$, sfruttando il fatto che la trasformata di $\frac{ds(t)}{dt}$ è $j2\pi f S(f)$. Dunque

$$H(f) = \frac{j2\pi f}{2\pi} e^{-j2\pi(-8 \cdot 10^{-3})t}$$

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \delta(t + 8 \cdot 10^{-3}) = \frac{1}{2\pi} \delta'(t + 8 \cdot 10^{-3})$$

Soluzione del problema 1.15

L'espressione di $s(t)$ nel tempo è data da:

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \text{triang} \left(\frac{t + \frac{T}{4}}{\frac{T}{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{T}} \text{triang} \left(\frac{t - \frac{T}{4}}{\frac{T}{2}} \right)$$

In frequenza:

$$\begin{aligned} S(f) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{T}{4} \text{sinc}^2 \left(f \frac{T}{4} \right) e^{j2\pi f \frac{T}{4}} - \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{T}{4} \text{sinc}^2 \left(f \frac{T}{4} \right) e^{-j2\pi f \frac{T}{4}} \\ &= j \frac{\sqrt{T}}{2} \text{sinc}^2 \left(f \frac{T}{4} \right) \frac{e^{j\pi f \frac{T}{2}} - e^{-j\pi f \frac{T}{2}}}{2j} \\ &= j \frac{\sqrt{T}}{2} \text{sinc}^2 \left(f \frac{T}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi f T}{2} \right) \end{aligned}$$

In uscita al blocco $H(f)$ si ha:

$$\begin{aligned} V(f) &= H(f)S(f) = \frac{\text{sinc} \left(\frac{fT}{2} \right)}{\text{sinc}^2 \left(\frac{fT}{4} \right)} \cdot \frac{e^{-j\pi f T}}{j\pi f T} j \frac{\sqrt{T}}{2} \text{sinc}^2 \left(f \frac{T}{4} \right) \sin \left(\frac{\pi f T}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{T}}{2} \frac{e^{-j\pi f T}}{\pi f T} \sin \left(\frac{\pi f T}{2} \right) \text{sinc} \left(\frac{fT}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{T} e^{-j\pi f T}}{4} \text{sinc}^2 \left(\frac{fT}{2} \right) \end{aligned}$$

Per calcolare l'antitrasformata è meglio scrivere l'espressione in frequenza nel modo seguente:

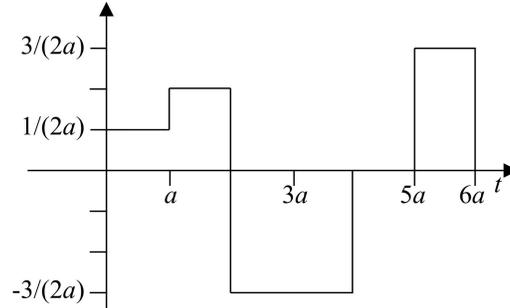
$$\frac{\sqrt{T}}{2} \frac{T}{2} \frac{1}{T} \text{sinc}^2 \left(\frac{fT}{2} \right) e^{-j\pi f T} = \frac{1}{2\sqrt{T}} \frac{T}{2} \text{sinc}^2 \left(\frac{fT}{2} \right) e^{-j\pi f T}$$

Infine, il segnale $v(t)$ risulta essere:

$$\frac{1}{2\sqrt{T}} \text{triang} \left(\frac{t - T}{T} \right)$$

Soluzione del problema 1.16

Nonostante il problema richieda prima la risposta impulsiva e poi la funzione di trasferimento, è più facile affrontare le cose al contrario e partire da quest'ultima. In particolare, la trasformata del segnale in uscita si ottiene più facilmente a partire dalla sua derivata $z(t)$, che è costituita da alcuni rettangoli, come rappresentato nella figura seguente.



Osservazione

Se una funzione è facilmente ottenibile come l'integrale o la derivata o la composizione di altre funzioni più semplici, è spesso conveniente lavorare con queste ultime e poi comporre la trasformata, sfruttandone le proprietà.

La trasformata di $z(t)$ sarà dunque

$$\begin{aligned}
 Z(f) &= \frac{1}{2a} a \operatorname{sinc}(fa) e^{-j2\pi f \frac{a}{2}} + \frac{1}{a} a \operatorname{sinc}(fa) e^{-j2\pi f \frac{3a}{2}} - \frac{3}{2a} a \operatorname{sinc}(fa) e^{-j2\pi f \frac{5a}{2}} \\
 &\quad - \frac{3}{2a} a \operatorname{sinc}(fa) e^{-j2\pi f \frac{7a}{2}} + \frac{3}{2a} a \operatorname{sinc}(fa) e^{-j2\pi f \frac{11a}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \operatorname{sinc}(fa) e^{-j\pi fa} + \operatorname{sinc}(fa) e^{-j\pi f 3a} - \frac{3}{2} \operatorname{sinc}(fa) e^{-j\pi f 5a} \\
 &\quad - \frac{3}{2} \operatorname{sinc}(fa) e^{-j\pi f 7a} + \frac{3}{2} \operatorname{sinc}(fa) e^{-j\pi f 11a}
 \end{aligned}$$

Il segnale $y(t)$ ha dunque trasformata pari a $\frac{Z(f)}{j2\pi f}$.

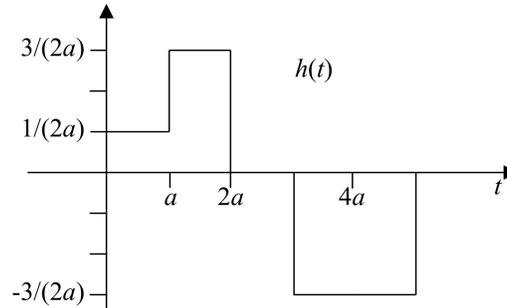
La funzione di trasferimento del sistema si può dunque ottenere come il rapporto tra la trasformata dell'uscita e quella dell'ingresso

$$\begin{aligned}
 H(f) &= \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{Y(f)}{a \operatorname{sinc}(fa) e^{-j\pi fa}} = \frac{Z(f)}{j2\pi fa \operatorname{sinc}(fa) e^{-j\pi fa}} \\
 &= \frac{1}{j2\pi fa} \left(\frac{1}{2} + e^{-j\pi 2fa} - \frac{3}{2} e^{-j\pi 4fa} - \frac{3}{2} e^{-j\pi 6fa} + \frac{3}{2} e^{-j\pi 10fa} \right)
 \end{aligned}$$

Di conseguenza, la risposta impulsiva risulta

$$h(t) = \int_{-\infty}^t \left(\frac{1}{2a} \delta(\tau) + \frac{1}{a} \delta(\tau - a) - \frac{3}{2a} \delta(\tau - 2a) - \frac{3}{2a} \delta(\tau - 3a) + \frac{3}{2a} \delta(\tau - 5a) \right) d\tau$$

che corrisponde alla figura seguente:



Osservazione

Per l'ultimo passaggio abbiamo sfruttato le proprietà della δ di Dirac.

$$\int \delta(t - a)g(t) dt = g(a)$$

$$\int \delta(t - a) dt = \int \delta(t - a) \cdot 1 dt = 1$$

Soluzione del problema 1.17

I segnali in uscita dai filtri possono essere ricostruiti a partire dal segnale in ingresso $s(t)$. Indicando l'uscita del primo filtro come $o_1(t)$ e l'uscita del secondo filtro come $o_2(t)$, si avrà dunque:

$$o_1(t) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^t (s(\tau) - s(\tau - 2a)) d\tau$$

$$o_2(t) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^t (s(\tau) - s(\tau - a)) d\tau$$

Calcolandone la trasformata:

$$O_1(f) = \frac{1}{j2\pi fa} S(f) (1 - e^{-j2\pi f 2a})$$

$$O_2(f) = \frac{1}{j2\pi fa} S(f) (1 - e^{-j2\pi fa})$$

Da cui

$$\begin{aligned}
 O_1(f) &= e^{-j2\pi fa} \frac{(e^{j2\pi fa} - e^{-j2\pi fa})}{j2\pi fa} S(f) \\
 &= e^{-j2\pi fa} \frac{\sin 2\pi fa}{\pi fa} S(f) \\
 &= 2 e^{-j2\pi fa} \operatorname{sinc}(2fa) S(f) \\
 O_2(f) &= e^{-j\pi fa} \frac{(e^{j\pi fa} - e^{-j\pi fa})}{j2\pi fa} S(f) \\
 &= e^{-j\pi fa} \operatorname{sinc}(fa) S(f)
 \end{aligned}$$

Infine, le funzioni di trasferimento dei due filtri sono quindi uguali a

$$\begin{aligned}
 H_1(f) &= \frac{O_1(f)}{S(f)} = 2 \operatorname{sinc}(2fa) \\
 H_2(f) &= \frac{O_2(f)}{S(f)} = \operatorname{sinc}(fa)
 \end{aligned}$$

il che permette di dire che il primo filtro ha banda **più stretta** del secondo.

Osservazione

Nella realtà, ambedue i filtri $H_1(f)$ e $H_2(f)$ hanno banda infinita, perché la funzione sinc non va mai a zero. L'affermazione di cui sopra è in effetti un'approssimazione, basata sull'idea di considerare solo il primo lobo della funzione. Conseguentemente, la "banda" approssimata della sinc corrisponde all'intervallo di frequenza tra 0 e il suo primo zero. Nel caso dell'esercizio, quindi, la banda di $H_1(f)$ è $1/(2a)$, mentre quella di $H_2(f)$ è $1/a$.

Soluzione del problema 1.18

Chiamando $s_1(t)$ e $s_2(t)$ i segnali presentati nel problema, è possibile scrivere:

$$s_2(t) = s_1(t) + s_1(t - 2T)$$

La crosscorrelazione dei due segnali è quindi data da:

$$\begin{aligned}
 R_{12}(\tau) &= \int_0^{5T} s_2(t) s_1(t + \tau) dt = \int_0^{5T} [s_1(t) + s_1(t - 2T)] s_1(t + \tau) dt \\
 &= \int_0^{5T} s_1(t) s_1(t + \tau) dt + \int_0^{5T} s_1(t - 2T) s_1(t + \tau) dt
 \end{aligned}$$

Ponendo $t - 2T = t_1$:

$$R_{12}(\tau) = R_1(\tau) + \int_{-2T}^{3T} s_1(t_1)s_1(t_1 + 2T + \tau)dt_1 = R_1(\tau) + R_1(\tau + 2T)$$

dove con $R_1(\tau)$ è indicata l'autocorrelazione di $s_1(t)$.

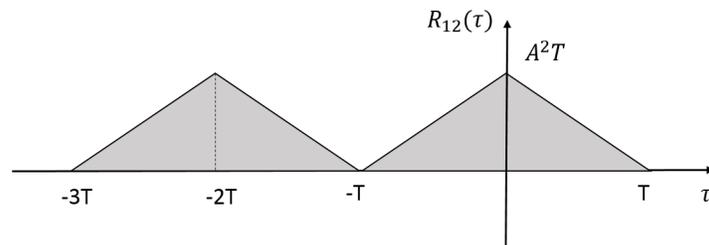


Figura 1.18 Grafico della crosscorrelazione $R_{12}(\tau)$

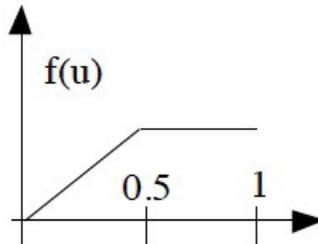
2

Problemi sulle variabili e i processi casuali

Problema	Argomento	Difficoltà
2.1	Calcolo della probabilità in un punto	*
2.2	Calcolo della probabilità di un intervallo	*
2.3	Trasformazione di variabile casuale	**
2.4	Trasformazione di variabile casuale	***
2.5	Trasformazione di variabile casuale (con sovrapposizione in uscita)	***
2.6	Trasformazione di variabile casuale (discreta in uscita)	***
2.7	Processo stazionario	*
2.8	Processo stazionario attraverso un derivatore	*
2.9	Processo non stazionario	**
2.10	Processo non stazionario	*
2.11	Media e potenza media di un processo casuale	**
2.12	Processo aleatorio e segnali digitali	***

Problema 2.1

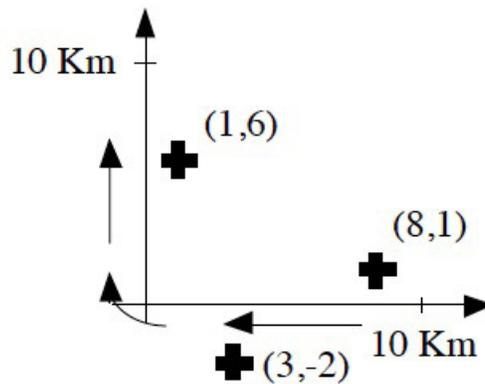
Sia un segnale digitale che percorre una rete di trasmissione ad una velocità pari a uc , ove c è la velocità della luce ed u è una variabile casuale con densità di probabilità definita in figura.



Determinare la probabilità che il segnale percorra 4.5 m in 10 nanosecondi.

Problema 2.2

Si consideri una automobile, dotata di telefono cellulare, che si muova in ambiente urbano con velocità casuale lungo il percorso indicato in figura. Sapendo che le stazioni radio base delle celle più vicine stanno nelle posizioni indicate dalle croci e assumendo che il cellulare sia agganciato in ogni istante alla cella più vicina, si calcoli il tempo medio per cui il cellulare rimarrà agganciato a ciascuna delle tre celle. Si consideri la velocità dell'automobile come una variabile Gaussiana di valore medio 50 Km/h e $\sigma = 10$ Km/h.



Problema 2.3

Si supponga di sparare con una pistola ad un bersaglio, e di sapere che l'errore che si compie rispetto al centro è rappresentabile, sia nella direzione orizzontale che in quella verticale (che chiamiamo X e Y , rispettivamente), mediante una Gaussiana di varianza pari a 3. Si supponga inoltre che gli errori nella direzione X siano indipendenti da quelli nella direzione Y .

qual è la distribuzione di probabilità dell'errore in distanza dal centro del bersaglio (detta $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$), e quali sono il suo valor medio e la sua varianza?

Problema 2.4

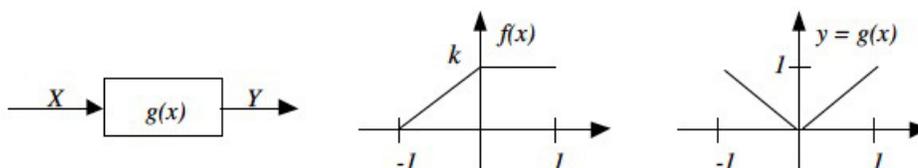
Si supponga di avere una variabile casuale X la cui densità di probabilità sia rappresentabile come $K \cos(\pi x/10)$ ($-5 \leq x \leq 5$) e si supponga inoltre che tale variabile sia posta in ingresso ad un blocco la cui funzione di trasferimento sia:

$$\begin{aligned} y &= 3 + 5 \sin(\pi x/10) & |x| \leq 2.5 \\ y &= 6.5 & x > 2.5 \\ y &= 0.5 & x < -2.5 \end{aligned}$$

qual è la funzione densità di probabilità di Y ?

Problema 2.5

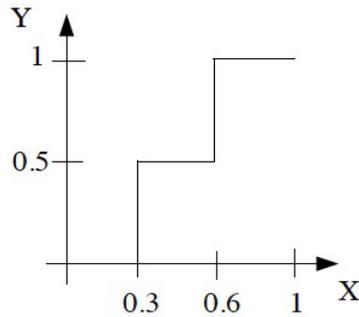
Sia data la variabile casuale X con funzione di densità $f(x)$ definita in figura: calcolare la densità di probabilità della variabile Y in uscita dal blocco $y = g(x)$ e il suo valor medio.



Problema 2.6

Sia un segnale casuale X con funzione densità di probabilità $f = k \sin \pi x$ nell'intervallo $[0, 1]$ e nulla altrove.

Determinare la funzione densità di probabilità della variabile Y , in uscita da un blocco con funzione di trasferimento come in figura.



Problema 2.7

Si supponga di avere un processo casuale $X(t) = K$, dove K è una variabile casuale Gaussiana con media m e varianza σ^2 .

- Il processo $X(t)$ è stazionario?
- Quali sono la sua media, la sua autocorrelazione e la sua autocovarianza?
- Supponendo di mettere in ingresso questo processo ad un blocco che realizza la funzione $\int_{-\infty}^t$, il processo in uscita $Y(t)$ è stazionario? Qual è la sua media?
- Il processo $Z(t) = \int_0^1 X(t) dt + \int_{-t}^5 Y(t) dt$ è stazionario?

Problema 2.8

Dimostrare che, per processi stocastici stazionari, la densità spettrale di potenza in uscita da un derivatore è, frequenza per frequenza, ω^2 volte quella dell'ingresso.

Problema 2.9

Sia dato un processo casuale non stazionario $n(t)$ con funzione densità di probabilità costante (per t fissato) in un dato intervallo, media d'insieme $E(n(t)) = 3 \sin(t)$ e varianza $\sigma^2 = 0.25$.

Determinare l'intervallo su cui la funzione densità di probabilità è non nulla (e quanto vale) per $t = 0$ e $t = \pi/2$.

Problema 2.10

Si supponga di avere un processo casuale $X(t)$ che rappresenta la posizione di una particella la cui posizione iniziale sia nota e posta nell'origine, ma la cui velocità iniziale e accelerazione siano due variabili casuali con funzione densità di probabilità costante nell'intervallo $[-1, 1]$.

Il processo $X(t)$ è stazionario in senso lato?

La velocità della particella $V(t)$, che è pure un processo, è stazionaria in senso lato?

Problema 2.11

Sia data una sequenza di rettangoli, inizialmente pensati con la stessa altezza (0.3 V) e durata (1 ns), ma con un intervallo tra l'uno e l'altro determinato da una variabile casuale T con densità di probabilità Gaussiana.

Se la lunghezza media di questi intervalli è 43 ns e la varianza 3 ns, trovare la potenza media del segnale, ovvero l'energia per secondo trasportata in media dal segnale.

Si supponga poi che le altezze (a causa di un problema del tutto indipendente da quello che causa i tempi di arrivo casuali) cambino secondo una variabile casuale A con densità di probabilità costante nell'intervallo $[0,2]$ V. Calcolare di nuovo la potenza media del segnale.

Calcolare infine tale potenza media anche nel caso in cui la densità di probabilità della variabile A sia data da un triangolo isoscele con base sul segmento $[0,2]$ V.

Problema 2.12

Supponendo di trasmettere un segnale binario mediante impulsi alti ± 1 (a rappresentare i bit 0 e 1 rispettivamente) e lunghi un tempo di bit T_b , si descriva il processo aleatorio che rappresenta tale segnale. Si supponga poi che il segnale venga trasmesso e in ricezione arrivi con un ritardo casuale, con distribuzione costante entro l'intervallo di un tempo di bit.

Nell'ipotesi che lo zero e l'uno siano simboli equiprobabili, si discuta se il segnale in trasmissione e quello in ricezione siano processi stazionari in senso lato oppure no.

2.1 Soluzione dei problemi

Soluzione del problema 2.1

La probabilità che il segnale percorra 4.5 m in 10 ns è la probabilità che la velocità sia

$$\frac{4.5}{10^{-8}} = 4.5 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 1.5 c$$

ove c è la velocità della luce. In questo caso, dunque, tale probabilità è pari alla probabilità che $(v = uc) u = 1.5$. Dal grafico si vede che $0 \leq u \leq 1$ e che dunque tale probabilità è nulla.

Osservazione

D'altro canto, anche se si fosse richiesta una velocità $v \leq c$ (ad esempio, $v = 0.3 c$) il risultato sarebbe stato il seguente:

$$P(u = 0.3) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{0.3-\epsilon}^{0.3+\epsilon} f(u) du \simeq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(0.3) \epsilon = 0$$

Dunque, anche con una velocità del segnale realizzabile fisicamente, la risposta esatta alla domanda sarebbe stata ancora 0.

Soluzione del problema 2.2

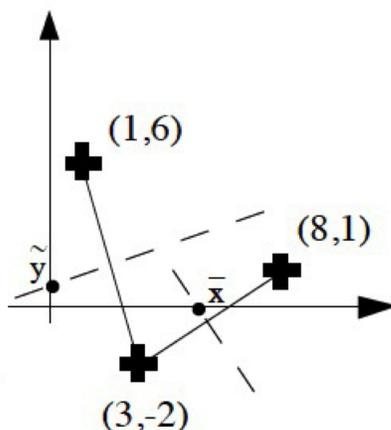
Per trovare i punti in cui l'automobile transita dal dominio di una cella a quello di un'altra, bisogna trovare l'intersezione del suo cammino con gli assi dei segmenti che congiungono a due a due i punti delle stazioni radio base (fig. 2.1).

Alternativamente, detto $(\bar{x}, 0)$ il punto contrassegnato in figura, deve essere

$$\begin{aligned} \sqrt{(\bar{x} - 8)^2 + (0 - 1)^2} &= \sqrt{(\bar{x} - 3)^2 + (0 + 2)^2} \\ \bar{x}^2 + 64 - 16\bar{x} + 1 &= \bar{x}^2 + 9 - 6\bar{x} + 4 \\ -16\bar{x} + 65 &= -6\bar{x} + 13 \\ 10\bar{x} &= 52 \\ \bar{x} &= \frac{52}{10} = 5.2 \text{ Km} \end{aligned}$$

Detto poi $(0, \tilde{y})$ il secondo punto ricercato, deve essere

$$\begin{aligned} \sqrt{(0 - 3)^2 + (\tilde{y} + 2)^2} &= \sqrt{(0 - 1)^2 + (\tilde{y} - 6)^2} \\ 9 + \tilde{y}^2 + 4\tilde{y} + 4 &= 1 + \tilde{y}^2 + 36 - 12\tilde{y} \\ 4\tilde{y} + 13 &= -12\tilde{y} + 37 \\ 16\tilde{y} &= 24 \\ \tilde{y} &= \frac{24}{16} = 1.5 \text{ Km} \end{aligned}$$


Figura 2.1

Dunque, la macchina fa un tragitto di $10 - 5.2 = 4.8$ Km agganciata alla prima cella (in $(8, 1)$). Poi, un tragitto di $5.2 + 1.5 = 6.7$ Km agganciata alla cella in $(3, -2)$. Infine, un tragitto di $10 - 1.5 = 8.5$ Km agganciata alla terza cella.

Dato che la velocità media dell'automobile è 50 Km/h, il tempo medio per ogni cella è

$$\frac{4.8}{50} = 0.096 \text{ h} = 5 \text{ min } 45.6 \text{ s}$$

$$\frac{6.7}{50} = 0.134 \text{ h} = 8 \text{ min } 2.4 \text{ s}$$

$$\frac{8.5}{50} = 0.170 \text{ h} = 10 \text{ min } 12 \text{ s}$$

Osservazione

Si noti che il valore della varianza è un dato che non serve per risolvere l'esercizio.

Soluzione del problema 2.3

Il problema può essere risolto se si ricorda che la probabilità di avere un errore in X compreso tra x_1 e x_2 e (contemporaneamente) Y compreso tra y_1 e y_2 si esprime come

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) \, dx \, dy$$

ove $f(x, y)$ è la funzione densità di probabilità congiunta delle variabili X e Y . Nel nostro caso, essendo le due variabili indipendenti tale funzione si riduce al prodotto delle due funzioni densità di probabilità di X e Y :

$$f(x, y) = f(x)f(y)$$

Se dunque le due variabili in gioco sono Gaussiane con la stessa media ($m = 0$) e la stessa varianza ($\sigma^2 = 3$), si può scrivere

$$f(x, y) = \frac{e^{-[(x-m)^2+(y-m)^2]/2\sigma^2}}{2\pi\sigma^2} = \frac{e^{-(x^2+y^2)/6}}{6\pi}$$

Se adesso supponiamo $x_1 = \tilde{x}$, $x_2 = \tilde{x} + dx$, $y_1 = \tilde{y}$ e infine $y_2 = \tilde{y} + dy$, l'integrale di cui sopra rappresenta

$$P(\tilde{x} \leq x \leq \tilde{x} + dx, \tilde{y} \leq y \leq \tilde{y} + dy)$$

che è anche pari a

$$P(\tilde{\rho} \leq \rho \leq \tilde{\rho} + d\rho, \tilde{\theta} \leq \theta \leq \tilde{\theta} + d\theta)$$

ove $\tilde{\rho} = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}$ e $\tilde{\theta} = \text{atan} \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}}$.
Perciò

$$\begin{aligned} P(\tilde{x} \leq x \leq \tilde{x} + dx, \tilde{y} \leq y \leq \tilde{y} + dy) &= f(\tilde{x}, \tilde{y}) dx dy \\ &= \frac{e^{-(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)/6}}{6\pi} dx dy \\ &= \frac{e^{-\tilde{\rho}^2/6}}{6\pi} \tilde{\rho} d\rho d\theta \\ &= \left(\frac{\tilde{\rho} e^{-\tilde{\rho}^2/6}}{3} d\rho \right) \left(\frac{d\theta}{2\pi} \right) \\ &= f(\tilde{\rho})f(\tilde{\theta}) d\rho d\theta \end{aligned}$$

Con questo, si ottiene la risposta alla domanda posta dal problema, perché la funzione densità di probabilità di ρ è la cosiddetta *funzione densità di probabilità di Rayleigh*

$$f(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho}{\alpha^2} e^{-\rho^2/2\alpha^2} & 0 \leq \rho \leq \infty \\ 0 & \rho < 0 \end{cases}$$

Si può verificare che

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \alpha \\ \overline{\rho^2} &= 2\alpha^2 \end{aligned}$$

Nel nostro caso, perciò, essendo $\alpha = \sqrt{3}$, come si rileva per ispezione, si ha che $\bar{\rho} = 2.17$ e $\bar{\rho}^2 = 6$.

Soluzione del problema 2.4

Disegnando la $y = g(x)$, essa ha l'andamento in fig. 2.2, dove il tratto intermedio ha valori tra

$$y_0 = 3 + 5 \sin\left(\frac{-2.5\pi}{10}\right) = 3 + 5 \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) \approx -0.54$$

$$y_1 = 3 + 5 \sin\left(\frac{2.5\pi}{10}\right) = 3 + 5 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 6.54$$

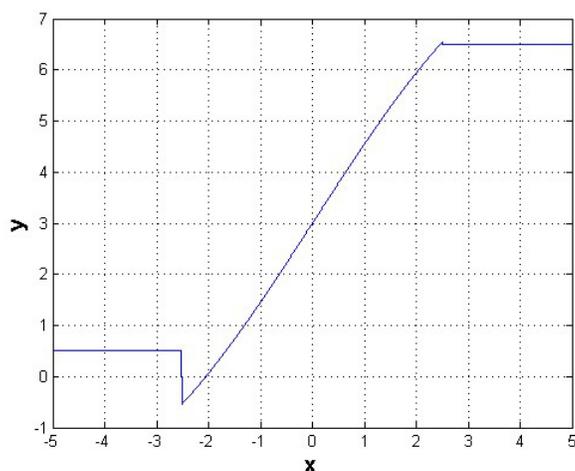


Figura 2.2 La funzione $y = g(x)$.

Nel tratto $|x| < 2.5$ la funzione $y = g(x)$ è invertibile, e si può applicare la formula

$$f(y) = f(x) \left| \frac{dx}{dy} \right|$$

ove

$$y = 3 + 5 \sin\left(\frac{\pi x}{10}\right)$$

$$x = \frac{10}{\pi} \arcsin\left(\frac{y-3}{5}\right)$$

$$\left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{5} \frac{10}{\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{y-3}{5}\right)^2}} \right| = \frac{10}{\pi} \frac{1}{\sqrt{6y - y^2 + 16}}$$

e dunque

$$\begin{aligned} f(y) &= K \cos \left[\frac{\pi}{10} \frac{10}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{y-3}{5} \right) \right) \right] \frac{10}{\pi} \frac{1}{\sqrt{6y-y^2+16}} \\ &= K \cos \left[\arcsin \left(\frac{y-3}{5} \right) \right] \frac{10}{\pi} \frac{1}{\sqrt{6y-y^2+16}} \end{aligned}$$

ove K è tale che

$$\int_{-5}^5 K \cos \frac{\pi x}{10} dx = 1 = K \frac{10}{\pi} \sin \frac{\pi x}{10} \Big|_{-5}^5 = \frac{20K}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{20K}{\pi}$$

e perciò $K = \frac{\pi}{20}$.

Per gli $x \geq 2.5$, l'uscita y è sempre uguale a 6.5. Dunque

$$P(y = 6.5) = P(x \geq 2.5)$$

In questo caso, la $f(y)$ diventa una δ di Dirac in 6.5 di ampiezza pari a

$$\begin{aligned} P(x \geq 2.5) &= \int_{2.5}^{\infty} f(x) dx = \int_{2.5}^5 \frac{\pi}{20} \cos \frac{\pi x}{10} dx = \frac{\pi}{20} \frac{10}{\pi} \sin \frac{\pi x}{10} \Big|_{2.5}^5 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

Similmente, tutte le $x \leq -2.5$ danno in uscita $y = 0.5$. Perciò

$$P(y = 0.5) = P(x \leq -2.5)$$

e la $f(y)$ si traduce in una δ di Dirac in 0.5 di ampiezza pari a

$$\begin{aligned} P(x \leq -2.5) &= \int_{-\infty}^{-2.5} f(x) dx = \int_{-5}^{-2.5} \frac{\pi}{20} \cos \frac{\pi x}{10} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

Concludendo, la $f(y)$ si può esprimere come

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) [\delta(y - 0.5) + \delta(y - 6.5)] + f_{inv}(y) \\ f_{inv}(y) &= \frac{1}{2} \cos \left[\arcsin \left(\frac{y-3}{5} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{6y-y^2+16}} = 0.1 \quad \text{solo per } y \in [-0.54, 6.54] \end{aligned}$$

Tale funzione densità di probabilità è presentata nella figura successiva.

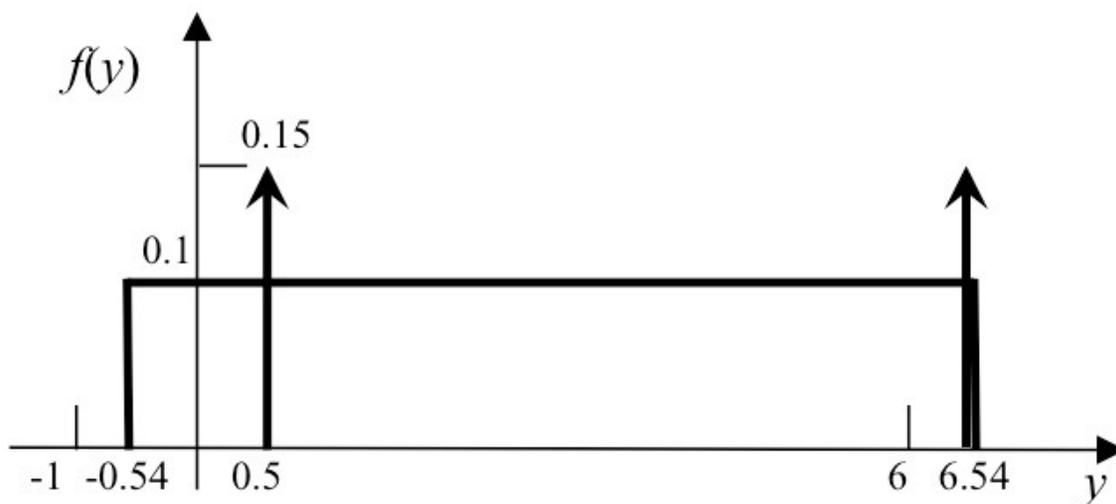


Figura 2.3 La funzione densità di probabilità $f_Y(y)$.

Soluzione del problema 2.5

Osservando la forma di $f(x)$ si osserva che la condizione di area unitaria è verificata se e solo se

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{k}{2} + k = 1 \quad \implies \quad k = \frac{2}{3}$$

D'altro canto, la funzione $g(x)$ è invertibile a tratti. Considerando prima la parte degli x negativi

$$y = -x \quad \implies \quad x = -y \quad \implies \quad \left| \frac{dx}{dy} \right| = 1$$

Perciò

$$f(y) = f(g^{-1}(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right| = k(-y + 1) \quad x < 0$$

Nel caso di x positivi, si ha

$$y = x \quad \implies \quad x = y \quad \implies \quad \left| \frac{dx}{dy} \right| = 1$$

Perciò

$$f(y) = f(g^{-1}(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right| = k \quad x \geq 0$$

Dunque $f(y)$ è la sovrapposizione di questi due tratti (ambedue i rami di $y = g(x)$ danno in uscita y positivi e compresi tra 0 e 1).

$$f(y) = k(-y + 1) + k = -yk + 2k = -\frac{2}{3}y + \frac{4}{3} \quad 0 \leq y \leq 1$$

Un rapido calcolo assicura che

$$\int_0^1 f(y) dy = \int_0^1 \left(-\frac{2}{3}y + \frac{4}{3}\right) dy = -\frac{2}{3} \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = 1$$

Per il calcolo del valor medio si deve risolvere l'integrale

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \int_0^1 y f(y) dy = \int_0^1 y \left(-\frac{2}{3}y + \frac{4}{3}\right) dy \\ &= -\frac{2}{3} \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{4}{3} \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = -\frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Osservazione

Si noti che, nel caso in cui due o più intervalli di valori della variabile in ingresso vengano trasformati nello stesso intervallo della variabile in uscita, le corrispondenti funzioni densità di probabilità si sommano, perché si tratta di eventi **mutuamente esclusivi**.

Soluzione del problema 2.6

La richiesta che $\int f(x) dx = 1$ impone che

$$\int_0^1 k \sin \pi x dx = \frac{-k \cos \pi x}{\pi} \Big|_0^1 = \frac{k}{\pi} 2 \implies k = \frac{\pi}{2}$$

Dato che la funzione di traferimento tra la variabile X e la variabile Y non è invertibile, neanche a tratti, bisognerà procedere in altro modo. In questo caso si può osservare che tutti gli ingressi compresi tra 0 e 0.3 forniscono in uscita 0, quelli tra 0.3 e 0.6 danno in uscita 0.5, mentre gli ingressi tra 0.6 e 1 danno in uscita 1. Perciò

$$\begin{aligned} P(0 \leq X \leq 0.3) &= P(Y = 0) \\ P(0.3 < X \leq 0.6) &= P(Y = 0.5) \\ P(0.6 < X \leq 1) &= P(Y = 1) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Osservazione

Si noti che, per evitare ambiguità, gli intervalli che definiscono le probabilità non sono sovrapposti negli estremi. Dal punto di vista dei calcoli svolti più sotto, l'eventuale sovrapposizione di un estremo tra due intervalli non porterebbe però ad alcun cambiamento, perché partiamo da una funzione densità di probabilità di una **variabile continua**. Se tale funzione si riferisse ad una **variabile discreta** e/o contenesse delle funzioni δ di Dirac, i risultati invece sarebbero diversi nei due casi di sovrapposizione/mancanza di sovrapposizione.

In altre parole, attenzione agli estremi di integrazione nel caso si calcolino probabilità a partire da funzioni densità di probabilità di variabili discrete.

In base a quanto indicato più sopra, la variabile Y può assumere solo 3 valori (in altre parole, è una variabile casuale discreta) e la sua funzione densità di probabilità sarà come in fig. 2.4.

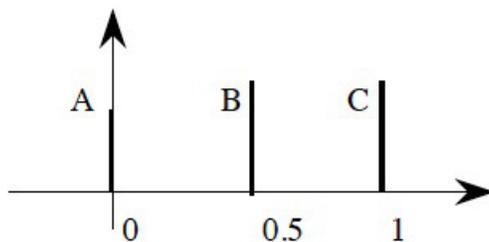


Figura 2.4 La funzione densità di probabilità per la variabile casuale Y .

Rimangono da determinare le altezze delle δ , indicate nel grafico come A , B e c . Partendo dalle equazioni (6.1) si ha che

$$\begin{aligned} A &= P(Y = 0) = \int_0^{0.3} f(x) dx = \int_0^{0.3} k \sin \pi x dx = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{\cos \pi x}{\pi} \right)_0^{0.3} \\ &= \frac{1}{\pi} \left(1 - \cos \frac{3\pi}{10} \right) \\ B &= P(Y = 0.5) = \int_{0.3}^{0.6} f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{3\pi}{10} - \cos \frac{6\pi}{10} \right) \\ C &= P(Y = 1) = \int_{0.6}^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{10} + 1 \right) \end{aligned}$$

Come ovvio (anche se è sempre meglio controllare per verificare i proprio calcoli):

$$A + B + C = P(Y = 0) + P(Y = 0.5) + P(Y = 1) = 1$$

Soluzione del problema 2.7

$X(t)$ è sicuramente stazionario, perché la sua media $m(t)$ è pari a m e quindi non dipende dal tempo e la sua autocovarianza è pari a σ^2 .

$Y(t)$ è pure stazionario, perché si ottiene da $X(t)$ attraverso un blocco lineare (l'integrale). Come dimostrato a lezione, un processo in uscita da un blocco lineare avente in ingresso un processo stazionario è di nuovo un processo stazionario.

Per la stessa ragione è stazionario anche il processo $Z(t)$.

Soluzione del problema 2.8

La teoria mostra che, per un processo stazionario, la funzione densità spettrale di potenza in uscita da un blocco è pari alla funzione densità spettrale di potenza in ingresso moltiplicata per il quadrato del modulo della funzione di trasferimento del blocco stesso.

In questo caso, il blocco di derivazione ha una funzione di trasferimento

$$H(f) = j2\pi f$$

Dato quindi che

$$|H(f)|^2 = \omega^2,$$

il risultato risulta dimostrato.

Soluzione del problema 2.9

Se $n(t)$ è un processo non stazionario, ma con densità di probabilità costante a t fissato in un dato intervallo e nulla altrove, $f(n(t))$ avrà una forma rettangolare, di cui conosciamo il punto centrale, ma non l'altezza e la larghezza.

Per trovare le quantità incognite, si può sfruttare il fatto che (detto \bar{n} il valore atteso $E(n(t))$ per t fissato)

$$\int_{\bar{n}-a}^{\bar{n}+a} n f(n) dn = \bar{n} = \int_{\bar{n}-a}^{\bar{n}+a} nk dn \quad \text{ove } k = \frac{1}{2a}$$

e anche

$$\int_{\bar{n}-a}^{\bar{n}+a} (n - \bar{n})^2 f(n) dn = \frac{1}{4}$$

In altri termini

$$\overline{n^2} - \bar{n}^2 = \frac{1}{4} \quad \text{ove } \overline{n^2} = \int_{\bar{n}-a}^{\bar{n}+a} n^2 \frac{1}{2a} dn = \frac{1}{2a} \frac{n^3}{3} \Big|_{\bar{n}-a}^{\bar{n}+a}$$

Per semplicità, dato che il calcolo vale per qualunque t e quindi per qualunque \bar{n} , scegliamo $t = 0$ e dunque $\bar{n} = 0$. In questo caso

$$\overline{n^2} = \frac{1}{2a} \frac{n^3}{3} \Big|_{-a}^a = \frac{2a^3}{3} \frac{1}{2a} = \frac{a^2}{3} = \frac{1}{4}$$

e quindi

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Concludendo, la variabile $n(t)$ ha una densità di probabilità costante (e pari a $\frac{1}{\sqrt{3}}$) in un intervallo ampio $\sqrt{3}$ attorno a $3 \sin t$. In particolare, per $t = 0$ e $t = \pi/2$ si avrà ciò che si vede in fig. 2.5.

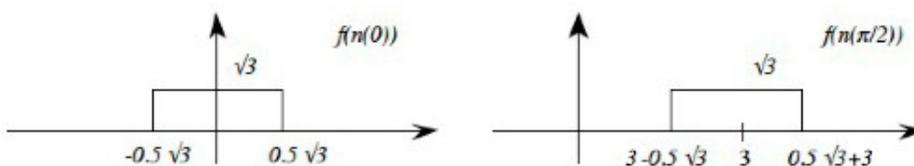


Figura 2.5 La funzione densità di probabilità di $n(t)$ per $t = 0$ e $t = \pi/2$.

Soluzione del problema 2.10

Il processo $X(t)$ si esprime come $x_0 + v_0 t + at^2$, dove il nome delle variabili è autoesplicativo.

Similmente, il processo casuale $V(t)$ che identifica la velocità sarà $v_0 + at$.

La funzione densità di probabilità di $V(t)$ a t fissato (funzione densità di probabilità del primo ordine per il processo) è dunque una funzione densità di probabilità ottenuta dalla convoluzione di quella di v_0 e quella di $v_1 = at$.

Osservazione

La formula generale dice che la funzione densità di probabilità della somma di due variabili casuali X e Y , detta Z , vale

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x, z-x) dx.$$

Nel nostro caso, dato che le due variabili (velocità iniziale e contributo dovuto all'accelerazione) sono indipendenti, la funzione densità di probabilità congiunta

f_{XY} si riduce al prodotto delle due funzioni densità di probabilità delle variabili iniziali e quindi:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x) dx = f_X(x) * f_Y(y)$$

Mentre v_0 ha funzione densità di probabilità nota, per v_1 si tratta di sfruttare la relazione che ci permette di calcolare la pdf in uscita da un blocco con funzione di trasferimento $y = at$. In questo caso, banalmente, si ottiene che la pdf è una costante nell'intervallo $[-t, t]$.

Per questo motivo, la pdf di $V(t)$ sarà un trapezio centrato nell'origine, con base maggiore da $1-t$ a $1+t$ e base minore da $-|1-t|$ a $|1-t|$ (dato che t può essere minore o maggiore di 1).

Di conseguenza, è facile osservare che il valor medio di $V(t)$ è sempre 0, dimostrando una stazionarietà del primo ordine del processo.

Per quanto riguarda la stazionarietà del secondo ordine, dato che la pdf cambia al variare del tempo, è chiaro che la autocorrelazione non dipende solo dalla differenza di due istanti di tempo. Quindi, il processo non è stazionario del secondo ordine e quindi non è stazionario in senso lato.

Discorso del tutto analogo vale per il processo $X(t)$.

Soluzione del problema 2.11

Dato che gli impulsi sono uguali, avranno anche la stessa energia, pari a

$$E = (0.3)^2 10^{-9} = 9 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

La potenza media è l'energia del singolo impulso per il numero medio di impulsi in un secondo. Tale numero è l'inverso della distanza temporale media T_m tra due impulsi. Quindi

$$n = \frac{1}{T_m} \quad P = nE = \frac{E}{T_m} = \frac{9 \cdot 10^{-11}}{43 \cdot 10^{-9}} = 2.1 \text{ mW}$$

Nel caso in cui gli impulsi non siano uguali, la loro energia non è più uguale e dunque sarà necessario calcolare l'energia media, definita come

$$E_m = \left(\int_0^2 A^2 f(A) dA \right) 10^{-9} = \frac{1}{2} \frac{A^3}{3} \Big|_0^2 10^{-9} \text{ J} = \frac{4}{3} 10^{-9} = 1.33 \text{ nJ}$$

In questo caso

$$P_m = \frac{E_m}{T_m} = \frac{8 \cdot 10^{-9}}{6 \cdot 43 \cdot 10^{-9}} = \frac{4}{129} = 31 \text{ mW}$$

Osservazione

Si noti che E_m e T_m possono essere calcolati indipendentemente solo perché le loro cause sono diverse ed indipendenti.

Se $f(A)$ ha forma triangolare

$$\begin{aligned} E_m &= \left(\int_0^1 A^2 A dA + \int_1^2 A^2(2-A) dA \right) 10^{-9} \\ &= \left(\frac{A^4}{4} \Big|_0^1 + 2 \frac{A^3}{3} \Big|_1^2 - \frac{A^4}{4} \Big|_1^2 \right) 10^{-9} \\ &= \left(\frac{1}{4} + 2 \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) - \frac{16}{4} + \frac{1}{4} \right) 10^{-9} \\ &= \left(-3.5 + 2 \frac{7}{3} \right) 10^{-9} = 1.17 \text{ nJ} \end{aligned}$$

Dunque

$$P_m = \frac{E_m}{T_m} = \frac{1.17 \cdot 10^{-9}}{43 \cdot 10^{-9}} = 27.2 \text{ mW}$$

Soluzione del problema 2.12

Detta V_n la variabile casuale che vale ± 1 e T_b il tempo di bit, il processo casuale in trasmissione sarà:

$$S_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \text{rect} \left(\frac{t - (n - 0.5)T_b}{T_b} \right)$$

e quello in ricezione

$$S_R(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \text{rect} \left(\frac{t - (n - 0.5)T_b - \tau}{T_b} \right),$$

con $\tau \in [0, T_b[$.

Il segnale in trasmissione non è stazionario. Per dimostrarlo, calcoliamone prima di tutto la media:

$$\begin{aligned} m_T(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \text{rect} \left(\frac{t - (n - 0.5)T_b}{T_b} \right) f(V_n) dV_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} V_n f(V_n) dV_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

e poi la autocorrelazione:

$$\begin{aligned} R_R(t_1, t_2) &= E_{V_n} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \operatorname{rect} \left(\frac{t_1 - (n - 0.5)T_b}{T_b} \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k \operatorname{rect} \left(\frac{t_2 - (k - 0.5)T_b}{T_b} \right) \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_{V_n}(V_n V_k) \operatorname{rect} \left(\frac{t_1 - (n - 0.5)T_b}{T_b} \right) \operatorname{rect} \left(\frac{t_2 - (k - 0.5)T_b}{T_b} \right) \end{aligned}$$

dove $E_{V_n}(\cdot)$ rappresenta il valore atteso rispetto a V_n .

A questo punto si nota che $E_{V_n}(V_n V_k)$ è diverso da zero solo se $k = n$, e in quel caso vale 1. Quindi:

$$R_R(t_1, t_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{rect} \left(\frac{t_1 - (n - 0.5)T_b}{T_b} \right) \operatorname{rect} \left(\frac{t_2 - (n - 0.5)T_b}{T_b} \right)$$

Come si nota, la autocorrelazione non dipende solo dalla differenza degli istanti di tempo, quindi il segnale, come indicato sopra, non è stazionario.

Il segnale in ricezione, invece, è stazionario.

Ripetendo lo stesso procedimento di cui sopra, infatti, per la media non cambia nulla:

$$\begin{aligned} m_R(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \operatorname{rect} \left(\frac{t - (n - 0.5)T_b - \tau}{T_b} \right) f(V_n) dV_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} V_n f(V_n) dV_n = 0. \end{aligned}$$

Per l'autocorrelazione $R_R(t_1, t_2)$ il calcolo è invece il seguente:

$$\begin{aligned} E_{\tau} \left(E_{V_n} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} V_n \operatorname{rect} \left(\frac{t_1 - (n - 0.5)T_b - \tau}{T_b} \right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k \operatorname{rect} \left(\frac{t_2 - (k - 0.5)T_b - \tau}{T_b} \right) \right) \right) \\ E_{\tau} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} E_{V_n}(V_n V_k) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{rect} \left(\frac{t_1 - (n - 0.5)T_b - \tau}{T_b} \right) \operatorname{rect} \left(\frac{t_2 - (k - 0.5)T_b - \tau}{T_b} \right) \right) \end{aligned}$$

dove si è aggiunto il valore atteso rispetto a τ , indicato come $E_{\tau}(\cdot)$.

Usando la stessa proprietà di $E_{V_n}(V_n V_k)$ di cui sopra:

$$\begin{aligned}
 R_R(t_1, t_2) &= E_\tau \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{rect} \left(\frac{t_1 - (n - 0.5)T_b - \tau}{T_b} \right) \text{rect} \left(\frac{t_2 - (n - 0.5)T_b - \tau}{T_b} \right) \right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{T_b} \text{rect} \left(\frac{t_1 - (n - 0.5)T_b - \tau}{T_b} \right) \text{rect} \left(\frac{t_2 - (n - 0.5)T_b - \tau}{T_b} \right) \frac{1}{T_b} d\tau \\
 &= \frac{1}{T_b} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{t_1 - nT_b - T_b}^{t_1 - nT_b} \text{rect} \left(\frac{\alpha - 0.5T_b}{T_b} \right) \text{rect} \left(\frac{\alpha - 0.5T_b - (t_2 - t_1)}{T_b} \right) d\alpha
 \end{aligned}$$

dove si è posto $\alpha = t_1 - nT_b - \tau$. Si noti che la serie è fatta da tanti termini, ognuno corrispondente all'integrale sull'intervallo $(t_1 - nT_b - T_b, t_1 - nT_b)$. Questa somma di integrali su intervalli non sovrapposti risulta indipendente dalla posizione di t_1 , perché **copre tutto l'asse dei tempi**.

Perciò, dopo un'ultima semplificazione:

$$R_R(t_1, t_2) = \frac{1}{T_b} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{\alpha - 0.5T_b}{T_b} \right) \text{rect} \left(\frac{\alpha - 0.5T_b - (t_2 - t_1)}{T_b} \right) d\alpha$$

In questa forma è chiaro che l'autocorrelazione del segnale in ricezione dipende solo dalla differenza tra gli istanti di tempo t_2 e t_1 , presi a caso lungo l'asse dei tempi. Quindi, come detto più sopra, il processo in ricezione è stazionario in senso lato.

Osservazione

In generale si può dimostrare nello stesso modo che **ogni segnale periodico** che sia ritardato di un valore casuale con possibili valori in tutto il suo periodo diventa un processo casuale stazionario.

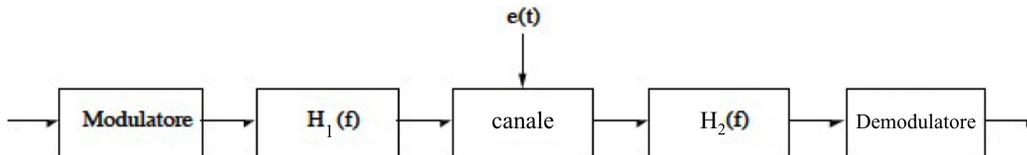
3

Problemi sulle modulazioni analogiche

Problema	Argomento	Difficoltà
3.1	Filtro di deenfasi con “whitening” del rumore	**
3.2	Filtro di preenfasi e deenfasi	**
3.3	Modulatore AM in quadratura	*
3.4	Banda di segnali “tipo” AM	*
3.5	Modulatore AM e FM in cascata	**
3.6	Combinazione di segnali AM e FM	***
3.7	Segnale AM-DSB in ingresso a blocco non lineare e filtro	***
3.8	Segnale FM come cascata di blocchi lineari	*
3.9	Moltiplicatore di frequenza	**
3.10	Demodulatore FM	*
3.11	Multiplexing di segnali FM	**
3.12	Multiplexing di segnali AM-SSB	*
3.13	Multiplexing di segnali AM e FM	*
3.14	Multiplexing di segnali AM e FM	*
3.15	Modulatore AM-DSB-SC	*
3.16	Multiplexing di segnali AM e FM	**
3.17	Multiplexing di segnali AM e FM	*
3.18	Indice di modulazione e figura di rumore di un segnale AM-DSB	**
3.19	Segnale più rumore in uscita da demodulatore AM o FM	***
3.20	Figura di rumore di un segnale FM	**

Problema 3.1

Si supponga di avere lo schema a blocchi in figura, ove il demodulatore e il modulatore si riferiscono ad una modulazione AM:

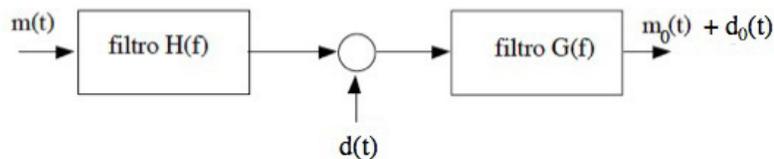


Si supponga che il canale sia modellizzabile come un sommatore e che la densità spettrale (bilatera) di potenza del rumore ($e(t)$ nello schema a blocchi) si possa scrivere come $0.00001|f|$.

Scegliere le funzioni di trasferimento dei due blocchi $H_1(f)$ e $H_2(f)$ in modo che il segnale non venga alterato, mentre il rumore in ingresso al demodulatore venga ricondotto ad un rumore bianco, con $N_0/2 = 10^{-6}$ W/Hz. Calcolare inoltre il rapporto segnale-rumore in ingresso al demodulatore in assenza e in presenza del blocco $H_2(f)$.

Problema 3.2

Sia dato un segnale $m(t)$ in ingresso alla catena in figura: dimostrare che il segnale in uscita $m_0(t)$ è una copia indistorta di $m(t)$ mentre la potenza del disturbo additivo in uscita $d_0(t)$ è inferiore nel caso in cui il filtro sia presente rispetto a quando il filtro $G(f)$ è assente (si calcoli tale potenza su una banda di 1 MHz).



Si assumano spettri monolateri, $A = 10^{-6}$, $B = 1$.

$$H(f) = s \left(1 + \frac{Af}{B} \right)$$

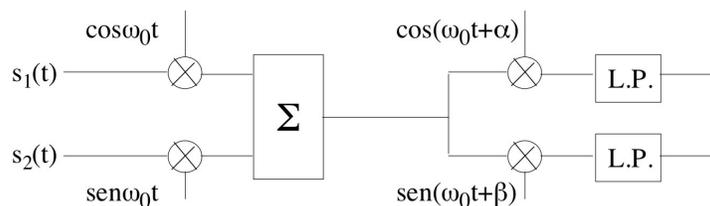
$$G(f) = \frac{1}{B + Af}$$

$$D(f) = F(d(t)) = \frac{5f}{10^{12}}$$

Problema 3.3

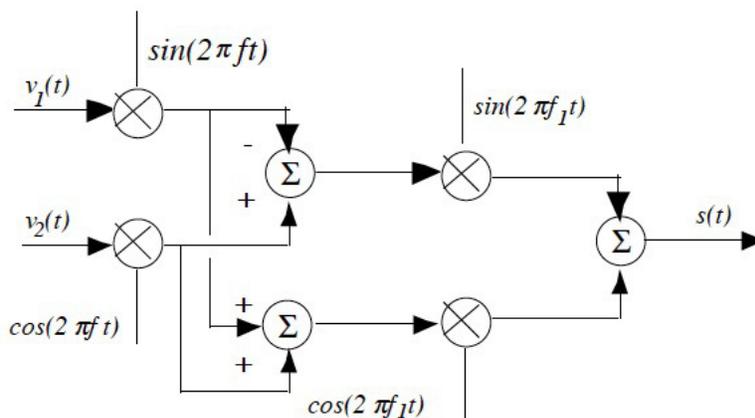
Si consideri lo schema in figura e si calcoli il rapporto tra la potenza in uscita dal ramo superiore e quella da ramo inferiore nei due casi:

1. $s_1(t) = \sqrt{2} \cos 4\pi f_1 t$, $s_2(t) = \cos 2\pi f_1 t + \sin 4\pi f_1 t$, $\alpha = \beta \neq 0$
2. $s_1(t) = A \operatorname{sinc}(f_1 t)$, $s_2(t) = A \operatorname{sinc}(2f_1 t)$, $\alpha \neq 0$, $\beta - \alpha = \pi/2$



Problema 3.4

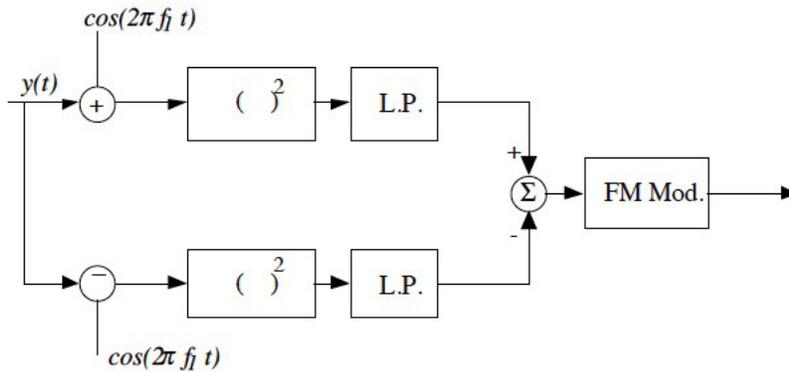
Definire la banda occupata dal segnale $s(t)$, sapendo che $v_1(t)$ e $v_2(t)$ occupano, ciascuno, una banda $(0, B)$ e che $|\omega - \omega_1| \gg 2\pi B$ e che $\omega \gg 2\pi B$.



Rifare il calcolo nel caso in cui $v_1(t) = v_2(t)$.

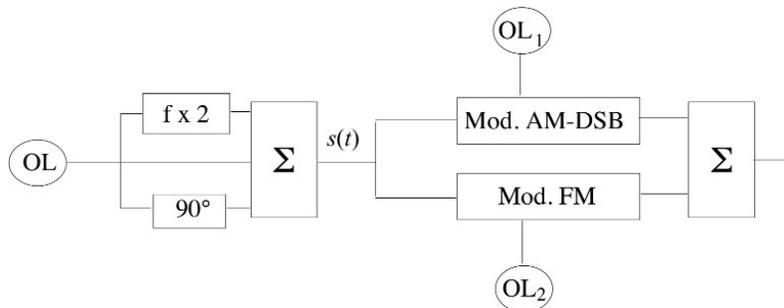
Problema 3.5

Definire lo spettro del segnale FM in uscita dallo schema in figura, assumendo la frequenza della portante FM (f_0) pari a 90 MHz, $f_1 = 60$ kHz, la frequenza di taglio del filtro passabasso (L.P.) $f_T = 1.5f_1$, la deviazione di frequenza del modulatore FM $\Delta f = 75$ kHz ed infine la banda del segnale $y(t)$ pari a (0, 20) kHz.



Problema 3.6

Si supponga di avere il sistema in figura, in cui l'oscillatore locale (OL) produce in uscita un segnale coseno alla frequenza di 3 kHz e ampiezza unitaria.



Calcolare:

1. la banda dei due segnali in uscita, sapendo che la banda massima dopo il sommatore finale deve essere pari a 150 kHz e ci deve essere tra i due segnali una banda di guardia di 10 kHz;

2. la potenza dei segnali modulati, sapendo che la potenza complessiva in uscita dallo stesso sommatore deve essere non superiore a 5 W;
3. le frequenze degli oscillatori locali OL_1 e OL_2 , sapendo che la banda di trasmissione deve essere centrata attorno ad 1 MHz;
4. l'indice di modulazione massimo della modulazione AM e la deviazione di frequenza del segnale FM;
5. il rapporto tra i γ (indice di robustezza al rumore) del segnale AM e di quello FM.

Problema 3.7

Sia dato un segnale $s(t)$ con spettro di ampiezza costante e pari a M nella banda $(0, K)$. Il segnale sia modulato in AM-DSB e inviato all'ingresso di un blocco con funzione di trasferimento non lineare $y = x^2 + 3x$.

Disegnare lo spettro del segnale in uscita a tale blocco (si ricordi che lo spettro di $s^2(t)$ si ottiene dalla convoluzione dello spettro di $s(t)$ con se stesso).

Definire inoltre la banda e la funzione di trasferimento di un ipotetico filtro posto in cascata al blocco di cui sopra, in maniera da recuperare (senza distorsioni) il segnale di partenza $s(t)$.

Problema 3.8

Sia data la cascata (finita) di blocchi, oscillatori locali (OL) e sommatore in figura.

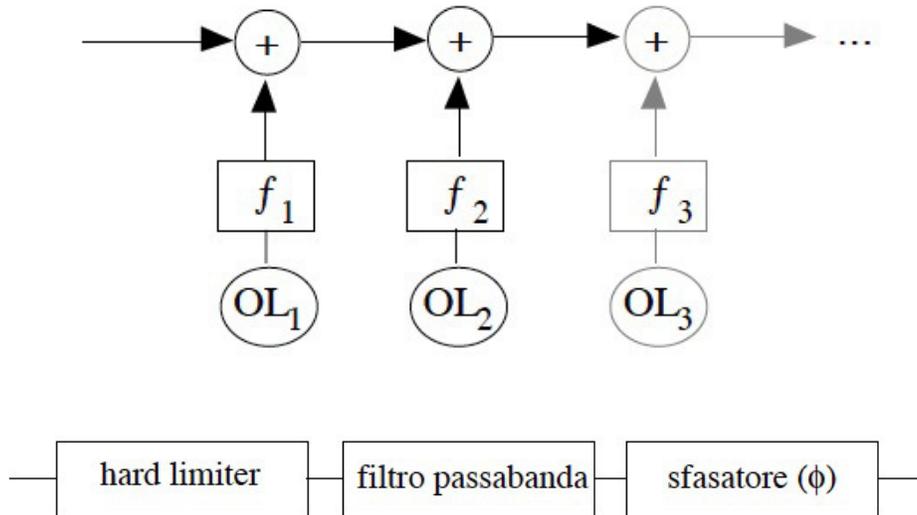
Supponendo che in ingresso al sistema ci sia un segnale cosinusoidale a frequenza ω_0 e che in uscita si voglia avere un segnale modulato FM a banda larga (con $\beta = 2$ e segnale modulante pari a $\cos \omega_1 t$), determinare:

1. il numero di blocchi, sommatore e OL necessari;
2. la frequenza di ogni OL;
3. la funzione di trasferimento $y = f_i(x)$ di ogni blocco.

Problema 3.9

Sia dato il seguente sistema per realizzare un moltiplicatore di frequenza: ove l'*hard limiter* è un oggetto che, avendo in ingresso una sinusoide, dà in uscita un'onda quadra di ampiezza pari a 1/10 della sinusoide e con la stessa frequenza. Si assuma il filtro ideale e passabanda con banda infinitamente stretta attorno a 3 volte la frequenza della sinusoide d'ingresso.

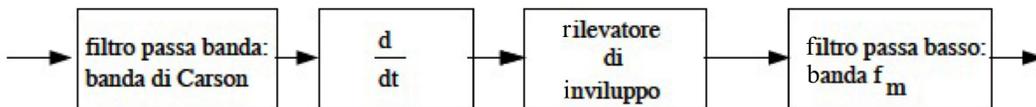
Calcolare:



1. la percentuale di potenza trasmessa all'uscita;
2. lo sfasamento ϕ necessario per ottenere in uscita un segnale in fase con l'ingresso per $t = 0$.

Problema 3.10

Dimostrare che il sistema in figura funziona da demodulatore per un segnale FM. Determinare inoltre la potenza in uscita nel caso in cui in ingresso, invece di avere un segnale FM, si abbia un segnale con densità spettrale di potenza costante su tutte le frequenze pari a $N/2$.



Problema 3.11

Siano date tre trasmissioni in modulazione di frequenza (FM), con portante rispettivamente a 1 kHz, 2 kHz, 2.5 kHz. La seconda onda (centrata a 2 kHz) modula a banda stretta ($\beta = 0.5$) un segnale con frequenza di 100 Hz. Gli altri segnali FM, invece, portano una modulante con frequenza pari a 200 Hz.

Calcolare:

1. gli indici di modulazione del primo e terzo segnale FM, sapendo che non si vuole sovrapposizione di banda tra i segnali, e che tutti e tre i segnali insieme non devono occupare una banda superiore ai 3.5 kHz;
2. la ampiezza di ogni portante, se ogni segnale FM non deve avere una potenza più alta di 1 W;
3. l'espressione algebrica della potenza trasportata da ognuno dei tre segnali FM esattamente alla frequenza della portante.

Problema 3.12

Si supponga di avere 7 canali aventi banda (0, 35) kHz, da trasmettersi AM-SSB in una banda di 150 kHz in multiplazione di frequenza.

Disegnare una possibile scelta di multiplexer, determinando il/i filtro/i da inserire nello schema a blocchi.

Problema 3.13

Siano dati i seguenti segnali:

1. 5 segnali con banda di 20 kHz, modulati AM-DSB;
2. 3 segnali FM con $\beta = 3$ e segnale modulante con frequenza 10 kHz.

Determinare la banda di trasmissione in caso si utilizzi una multiplazione di frequenza per trasmettere contemporaneamente tutti questi segnali. Determinare inoltre l'indice di modulazione dei segnali AM, sapendo che la portante di ognuno degli 8 segnali ha ampiezza di 1 V, che la potenza totale trasmessa è pari a 5 W e che il segnale modulante è assimilabile ad una variabile casuale con funzione densità di probabilità costante nell'intervallo $[-1,1]$.

Problema 3.14

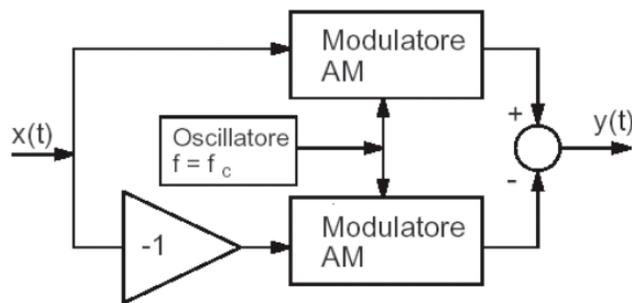
Si supponga di dover trasmettere cinque canali usando portanti di ampiezza $A = \sqrt{2}$ V e frequenza attorno ai 100 MHz. Tali canali siano:

- 3 canali AM-SSB con segnali modulanti in banda base tra 0 e 20 kHz;
- 2 canali FM con segnali modulanti in banda base tra 0 e 10 kHz.

Calcolare i parametri delle modulazioni in modo che la banda complessiva occupata non sia maggiore di 150 kHz e che la potenza complessiva non sia superiore a 5.5 W, sapendo che la densità di potenza (in banda base) dei segnali che sono modulati AM segue la legge $5e^{-|f|}$.

Problema 3.15

Un segnale passabasso $x(t)$ avente densità spettrale di potenza $S_x = 0.5$ W/Hz e banda 10 kHz entra nello schema in figura. I due modulatori AM, identici, hanno ampiezza della portante $A_c = 1$, indice di modulazione $k = 1$ e frequenza della portante $f_c = 100$ kHz.



Trovare l'espressione del segnale modulato $y(t)$ e dire a quale modulazione (nota) corrisponde. Calcolare inoltre la potenza media di $y(t)$.

Problema 3.16

Si considerino due segnali $s(t)$ e $v(t)$; $s(t)$ è un segnale casuale stazionario con banda $B = 1$ KHz e funzione densità di probabilità costante nell'intervallo $[-1, 5]$, mentre $v(t)$ è un segnale deterministico, periodico di periodo $T_0 = 1$ ms. Supponendo che $s(t)$ sia modulato AM, si scelga il suo indice di modulazione come il valore più piccolo tra quello massimo possibile per utilizzare il demodulatore ad involuppo e quello che permette di avere una potenza in uscita al modulatore pari a $(2 + P_s)/2$, con P_s la potenza del segnale $s(t)$ e ampiezza della portante pari a $\sqrt{2}$.

Supponendo invece che il segnale $v(t)$ sia filtrato passabasso (il filtro ha frequenza di taglio pari a $f_T = 2.8$ KHz) e modulato FM con una deviazione di frequenza $\Delta f = 100$ Hz, si calcoli e disegni lo spettro del segnale modulante. Se infine

la banda totale dei due segnali AM e FM trasmessi in multiplazione di frequenza è pari a $B_{TOT} = 10$ KHz e la loro potenza complessiva è pari a 5 W, calcolare l'ampiezza della portante del modulatore FM e la banda di guardia (se esiste) tra i due segnali.

Problema 3.17

Sono dati tre segnali $s_1(t)$, $s_2(t)$, $s_3(t)$, che occupano le bande [0, 5 kHz], [0, 3 kHz] e [0, 4 kHz] rispettivamente.

Il primo segnale, $s_1(t)$, viene elevato al quadrato e quindi utilizzato per modulare AM una portante posta a 540 kHz.

Il secondo segnale $s_2(t)$, invece, è derivato rispetto al tempo prima di modulare AM DSB-SC una seconda portante posta a 587 kHz.

Il terzo segnale $s_3(t)$ è infine ritardato di 10 ms ed utilizzato per modulare FM a banda larga una terza portante collocata a 600 kHz.

Infine, i tre segnali modulati sono tutti inviati sullo stesso canale avente per banda passante l'intervallo 500-640 kHz.

Si supponga di voler impiegare per il terzo segnale modulato la banda più larga possibile, rispettando però i seguenti vincoli:

- la banda di Carson del segnale sia tutta compresa nella banda passante del canale;
- oltre alla banda di Carson sia lasciato come banda di guardia un 12.5% della banda occupata dal segnale modulato.

Determinare il Δf della modulazione FM del terzo segnale, ed evidenziare quali intervalli di frequenze sul canale rimangono disponibili per eventuali altre trasmissioni in parallelo a quelle già menzionate (è esclusa la banda di guardia).

Problema 3.18

Sia il segnale

$$s(t) = \cos(\omega_m t) \left[3 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{2(t - nT_m)}{T_m} \right) - 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{2(t - nT_m - T_m/2)}{T_m} \right) \right]$$

in ingresso ad un modulatore AM-DSB.

- Qual è l'indice di modulazione massimo ammissibile?
- Qual è il valore del coefficiente γ della modulazione?

Problema 3.19

Sia dato un segnale sinusoidale $5 \sin(\omega t)$, a cui si aggiunge un rumore dall'espressione $B [\sin \omega t + 2 \cos(\omega + \Delta\omega)t]$, dove B è una variabile casuale con funzione densità di probabilità costante tra 0 e 5 (e zero altrove), $\omega = 50$ rad/s, $\Delta\omega = 10$ rad/s.

Calcolare la potenza media su un periodo dei segnali in uscita da un demodulatore AM a involuppo o da un demodulatore FM.

Problema 3.20

Si supponga di avere un segnale $s(t)$ con spettro costante e di valore pari ad 10^{-3} nella banda $[-10, 10]$ kHz.

Si calcoli:

1. lo spettro di $s^2(t)$,
2. la potenza di $s(t)$,
3. il γ se $s(t)$ venisse utilizzato come ingresso ad un modulatore FM con deviazione di frequenza pari a 30 kHz,
4. la potenza del segnale FM in quel caso, assumendo che la portante abbia ampiezza pari a 2.

3.1 Soluzione dei problemi

Soluzione del problema 3.1

Per rendere il rumore bianco in ingresso al demodulatore, è richiesto che il filtro $H_2(f)$ sia tale che

$$\frac{N_0}{2} = 10^{-6} \frac{\text{W}}{\text{Hz}} = |H_2(f)|^2 10^{-5} |f|$$

e dunque

$$|H_2(f)|^2 = \frac{1}{10|f|} \quad |H_2(f)| = \frac{1}{\sqrt{10|f|}}$$

Volendo avere il segnale inalterato, si chiede anche che (in assenza di rumore)

$$V_0(f) = H_2(f)H_1(f)V(f) = aV(f)e^{jbf}$$

dove $V(f)$ è la trasformata del segnale modulato, $V_0(f)$ la trasformata del segnale prima del demodulatore e a e b sono due costanti arbitrarie. Ponendo ad esempio $a = 1$ e $b = 0$

$$|H_1(f)| = \frac{1}{|H_2(f)|} = \sqrt{10|f|} \quad \angle H_1(f) = \angle H_2(f)$$

Dato che $\angle H_2(f)$ non è definita sulla base delle condizioni poste dal problema, possiamo sceglierla nulla per semplicità.

In assenza di $H_2(f)$ e di $H_1(f)$ il rapporto segnale rumore in ingresso al demodulatore vale

$$\frac{S}{N} = \frac{2 \int_{-B}^B |V(f)|^2 df}{2 \int_{-B}^B 10^{-5} |f| df}$$

ove B è la banda del segnale *modulante*.

Introducendo $H_1(f)$ e $H_2(f)$ tale rapporto diviene

$$\frac{2 \int_{-B}^B |V(f)|^2 df}{2 \int_{-B}^B 10^{-6} df}$$

Il rapporto tra i due rapporti è dunque

$$\frac{\int_{-B}^B 10^{-5} |f| df}{\int_{-B}^B 10^{-6} df} = 10 \frac{\int_0^B |f| df}{B} = \frac{10}{B} \left. \frac{f^2}{2} \right|_0^B = \frac{10}{B} \frac{B^2}{2} = 5B$$

Soluzione del problema 3.2

Il segnale $m_0(t) + d_0(t)$ in uscita vale

$$m_0(t) + d_0(t) = (m(t) * h(t) + d(t)) * g(t)$$

ove $h(t)$ e $g(t)$ sono le risposte impulsive, rispettivamente, dei filtri indicati come $H(f)$ e $G(f)$. Per la proprietà distributiva della convoluzione

$$m_0(t) + d_0(t) = m(t) * h(t) * g(t) + d(t) * g(t)$$

In frequenza:

$$\begin{aligned} M_0(f) + D_0(f) &= M(f)G(f)H(f) + D(f)G(f) \\ &= M(f)s \left(1 + \frac{Af}{B}\right) \frac{1}{B + Af} + \frac{5f}{10^{12}(B + Af)} \\ &= M(f) \frac{s}{B} + \frac{5f}{10^{12}(B + Af)} \end{aligned}$$

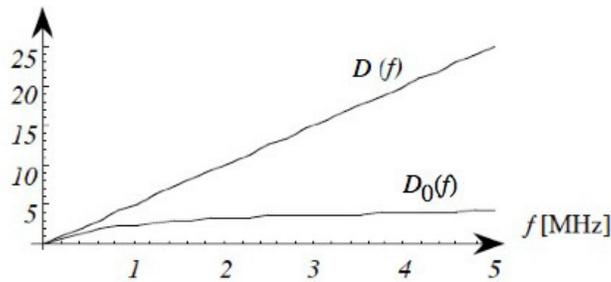


Figura 3.1 lo spettro del disturbo in ingresso ($D(f)$) e di quello in uscita ($D_0(f)$).

Dunque, $M_0(f)$ è multiplo di $M(f)$, e quindi $m_0(t)$ è multiplo di $m(t)$. Di conseguenza, non c'è distorsione tra l'ingresso e l'uscita del circuito. Invece, come si deduce dai grafici in (fig. 3.1),

$$D_0(f) = \frac{5f}{10^6 + f} 10^{-6}$$

è sempre più piccola di $D(f)$ su tutte le frequenze.

Quindi, la potenza del disturbo nei due casi, calcolata su una banda di 1 MHz come suggerito dal testo, è

$$\begin{aligned} P_N &= \int_0^{10^6} \left(\frac{5f}{10^{12}}\right)^2 df = 8.33 \mu\text{W} \\ P_{d_0} &= \int_0^{10^6} \left(\frac{5f}{10^6(B + Af)} 10^{-6}\right)^2 df = 2.84 \mu\text{W} \end{aligned}$$

e la potenza di rumore è diminuita di un fattore circa pari a 3.

Osservazione

È chiaro che né il disturbo iniziale $d(t)$ né quello dopo il filtro hanno un significato reale, perché hanno ambedue banda infinita. L'esempio serve ad indicare che un filtro passabasso in uscita (questo è essenzialmente il blocco $G(f)$) può ridurre gli effetti di un disturbo ad alta frequenza, purché il suo effetto sul segnale sia compensato da un filtro in trasmissione. La coppia $H(f)$ e $G(f)$ viene normalmente indicata come filtri di *pre-enfasi* e di *de-enfasi*, perché il primo enfatizza le alte frequenze (del segnale) e il secondo le fa tornare al livello precedente.

Soluzione del problema 3.3

Il segnale in uscita dal ramo superiore (ma prima del filtro) è

$$\begin{aligned} y(t) &= s_1(t) \cos \omega_0 t \cos(\omega_0 t + \alpha) + s_2(t) \sin \omega_0 t \cos(\omega_0 t + \alpha) \\ &= \frac{s_1(t)}{2} [\cos(2\omega_0 t + \alpha) + \cos \alpha] + \frac{s_2(t)}{2} [\sin(2\omega_0 t + \alpha) + \sin(-\alpha)] \end{aligned}$$

Dopo il filtro, si avrà dunque

$$v_1(t) = \frac{s_1(t)}{2} \cos \alpha - \frac{s_2(t)}{2} \sin \alpha.$$

In maniera del tutto analoga, in uscita dal ramo inferiore e dopo il filtro, si avrà

$$v_2(t) = \frac{s_2(t)}{2} \cos \beta + \frac{s_1(t)}{2} \sin \beta.$$

La potenza del primo segnale è quindi

$$P_{v1} = \frac{P_1}{4} \cos^2 \alpha + \frac{P_2}{4} \sin^2 \alpha - P_{12} \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{2},$$

dove P_1 è la potenza di $s_1(t)$, P_2 è la potenza di $s_2(t)$ e

$$P_{12} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{+T/2} s_1(t) s_2(t) dt.$$

Analogamente la potenza del secondo segnale è

$$P_{v2} = \frac{P_2}{4} \cos^2 \beta + \frac{P_1}{4} \sin^2 \beta + P_{12} \frac{\cos \beta \sin \beta}{2}.$$

Nel primo caso prospettato nell'esercizio le due potenze sono uguali, perché $\alpha = \beta$ (ma questo non basta!), perché $P_1 = P_2$ e infine perché i segnali 1 e 2 sono ortogonali, cioè $P_{12} = 0$. Nel secondo caso le due potenze sono ancora uguali perché $\cos \beta = -\sin \alpha$, $\sin \beta = \cos \alpha$:

$$\cos \beta \sin \beta = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \sin \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha \cos \alpha,$$

grazie alla condizione su α e β che è stata imposta.

Osservazione

Se si volesse calcolare P_1 e P_2 nel secondo caso, si potrebbe sfruttare il fatto che $\int \text{sinc}^2(at) dt = 1/a$. Infatti, secondo il teorema di Parseval, per ogni segnale è valida la seguente relazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df.$$

Nel caso di $s(t) = \text{sinc}(at)$, $S(f) = \frac{1}{a} \text{rect}\left(\frac{f}{a}\right)$ e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}^2(t) dt = \frac{1}{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \text{rect}\left(\frac{f}{a}\right) \right|^2 df = \frac{1}{a^2} \int_{-a/2}^{+a/2} 1 df = \frac{1}{a}.$$

Soluzione del problema 3.4

Il segnale in uscita dal circuito vale

$$\begin{aligned} s(t) &= (-v_1(t) \sin \omega t + v_2(t) \cos \omega t) \sin \omega_1 t \\ &+ (v_1(t) \sin \omega t + v_2(t) \cos \omega t) \cos \omega_1 t \end{aligned}$$

I termini tra parentesi corrispondono a segnali che occupano una banda pari a $2B$ intorno a $f = \omega/(2\pi)$ (e il fatto che $\omega \gg 2\pi B$ permette di non avere *aliasing*, ovvero sovrapposizione degli spettri).

Sviluppando i calcoli

$$\begin{aligned} &v_1(t)(-\sin \omega t \sin \omega_1 t + \sin \omega t \cos \omega_1 t) \\ &= \frac{v_1}{2} [\cos(\omega + \omega_1)t - \cos(\omega - \omega_1)t + \sin(\omega + \omega_1)t + \sin(\omega - \omega_1)t] \\ &v_2(t)(\cos \omega t \sin \omega_1 t + \cos \omega t \cos \omega_1 t) \\ &= \frac{v_2}{2} [\sin(\omega_1 + \omega)t + \sin(\omega_1 - \omega)t + \cos(\omega + \omega_1)t + \cos(\omega - \omega_1)t] \end{aligned}$$

Dunque, $s(t)$ occupa una banda di $4B$ attorno a $f + f_1$ e una banda di $4B$ attorno a $f - f_1$ (e la condizione $|\omega - \omega_1| \gg 2\pi B$ ancora una volta impedisce l'*aliasing*). Se $v_1(t) = v_2(t)$, $s(t)$ si semplifica in

$$s(t) = v_1 [\cos(\omega + \omega_1)t + \sin(\omega + \omega_1)t]$$

e dunque il segnale adesso occupa solo una banda di $4B$ attorno a $f + f_1$.

Soluzione del problema 3.5

Considerando per il momento solo il ramo superiore dello schema, dopo il sommatore si ha

$$y(t) + \cos 2\pi f_1 t$$

Dopo l'elevamento al quadrato

$$y^2(t) + \cos^2 2\pi f_1 t + 2y(t) \cos 2\pi f_1 t = y^2(t) + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4\pi f_1 t}{2} + 2y(t) \cos 2\pi f_1 t$$

e il segnale ha spettro come in fig. 3.2 (si omette per semplicità di visualizzazione una parte dello spettro alle frequenze negative).

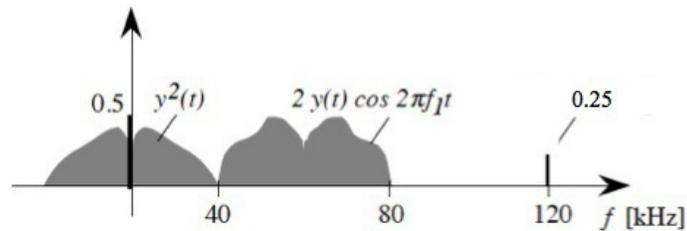


Figura 3.2 Lo spettro (approssimato) del segnale in ingresso al filtro passabasso del ramo superiore del circuito introdotto dall'esercizio.

Si noti che il disegno è approssimato e la cosa importante sono le bande. In particolare (vedi l'osservazione nel box più sotto), lo spettro di $s^2(t)$ occupa una banda doppia di quello di $s(t)$.

In questo caso $1.5f_1 = 60 \cdot 1.5 = 90$ kHz, e dal filtro passabasso esce tutto tranne il coseno a 120 kHz.

Osservazione

Lo spettro del quadrato di un segnale si ottiene in generale attraverso la convoluzione dello spettro di una eguale con se stesso.

Se però $s(t)$ è un coseno, la situazione è più semplice e si può ragionare nel tempo:

$$s^2(t) = \cos^2(\omega t) = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}$$

che ha banda pari a due volte il coseno di partenza.

Se $s(t)$ è composto da due coseni, con $\omega_2 > \omega_1$:

$$\begin{aligned} s^2(t) &= (\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))^2 \\ &= \cos^2(\omega_1 t) + \cos^2(\omega_2 t) + 2 \cos(\omega_1 t) \cos(\omega_2 t) \\ &= \frac{1 + \cos 2\omega_1 t}{2} + \frac{1 + \cos 2\omega_2 t}{2} + \frac{\cos(\omega_1 - \omega_2)t + \cos(\omega_1 + \omega_2)t}{2} \end{aligned}$$

che ha banda $2\omega_2$, cioè il doppio della frequenza più alta del segnale.

Generalizzando a un generico segnale, rappresentabile come la sovrapposizione di infiniti seni e coseni, ognuno ad una frequenza, si intuisce come lo spettro del segnale quadrato abbia banda doppia di quella del segnale iniziale.

Nel ramo inferiore dello schema succedono cose analoghe, a parte i segni e l'ingresso al sommatore è pari a:

$$y^2(t) + \cos^2 2\pi f_1 t - 2y(t) \cos 2\pi f_1 t = y^2(t) + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4\pi f_1 t}{2} - 2y(t) \cos 2\pi f_1 t$$

La differenza tra i due ingressi (fig. 3.3) e quindi l'ingresso al modulatore FM vale quindi:

$$\begin{aligned} y^2(t) + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4\pi f_1 t}{2} + 2y(t) \cos 2\pi f_1 t \\ - y^2(t) - \frac{1}{2} - \frac{\cos 4\pi f_1 t}{2} + 2y(t) \cos 2\pi f_1 t \\ = 4y(t) \cos 2\pi f_1 t \end{aligned}$$

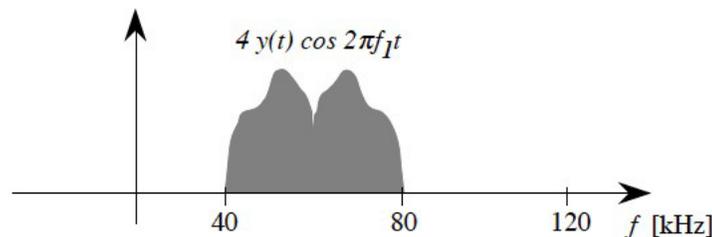


Figura 3.3 Lo spettro (approssimato) del segnale in ingresso al modulatore FM.

Questo segnale ha banda 80 kHz ed è modulato FM, andando ad occupare una banda (definita dall'approssimazione di Carson)

$$B = 2(\Delta f + B) = 2(75 + 80) = 310 \text{ kHz}$$

attorno a 90 MHz (quindi tra 89.845 e 90.155 MHz).

Soluzione del problema 3.6

Detta $\cos \omega_0 t$ l'uscita dell'oscillatore locale, il segnale $s(t)$ è pari a

$$s(t) = \cos \omega_0 t + \sin \omega_0 t + \cos 2\omega_0 t$$

ed ha dunque una banda pari alla sua componente a frequenza più elevata, $2f_0 = 6$ kHz.

La banda B del segnale AM-DSB sarà dunque il doppio, pari a 12 kHz.

Sapendo che la banda di guardia è di 10 kHz, al segnale FM rimangono $150 - 10 - 12 = 128$ kHz.

Infine, dato che la banda di Carson di un segnale FM è pari a

$$B_c = 2(\Delta f + B),$$

si ottiene che Δf vale 58 kHz.

I due segnali modulati devono essere trasmessi attorno alla frequenza di 1 MHz, precisamente nella banda [0.925 - 1.075] MHz, perché si hanno a disposizione 150 kHz al massimo.

Supponendo di cominciare con l'assegnare le frequenze più basse al segnale AM, la sua portante deve stare a $925 + 6 = 931$ kHz, mentre la portante del segnale FM deve stare a $931 + 6 + 10 + 58 + 6 = 1011$ kHz.

Assumendo poi che le due portanti in uscita dagli oscillatori OL_1 e OL_2 abbiano la stessa ampiezza A , la potenza del segnale FM è $A^2/2$, mentre quella del segnale AM-DSB è $\frac{A^2}{2}(1 + k^2 P_m)$, dove P_m è la potenza del segnale modulante $s(t)$, che è pari a $1/2 + 1/2 + 1/2 = 3/2$ W, e k è l'indice di modulazione.

Assumendo di conoscere k , dato che la potenza massima è pari a 5W, si ottiene che

$$5 = P_{FM} + P_{AM} = A^2 \frac{(4 + 3k^2)}{4}$$

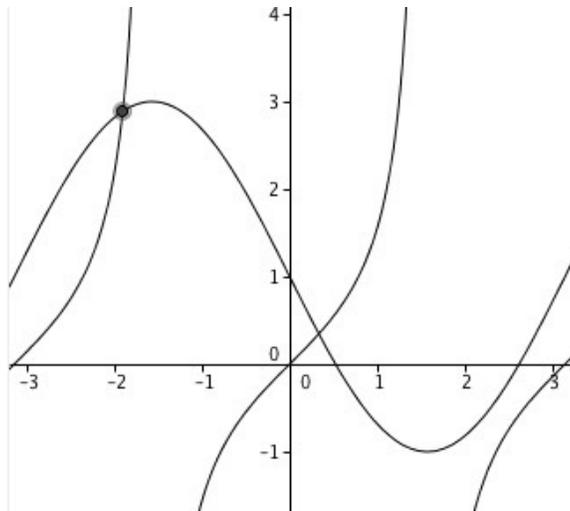
$$A = \sqrt{\frac{20}{4 + 3k^2}}$$

Infine, per il calcolo dell'indice di modulazione massimo del segnale AM-DSB, è necessario trovare il minimo del segnale $s(t)$.

Purtroppo la cosa non è fattibile analiticamente, in quanto derivando $s(t)$ si ottiene l'equazione

$$\tan(\omega_0 t) = 1 - 2 \sin(\omega_0 t)$$

la cui soluzione è rappresentata graficamente nella figura seguente.



Numericamente si ottiene che tale minimo vale -2.1 (si veda il punto indicato nella figura precedente), per cui il valore massimo di k è il suo inverso e opposto, pari a $\frac{10}{21}$. Inserendo questo dato nella formula di cui sopra, si ottiene che A vale 5.38 . Per quanto riguarda l'ultimo punto

$$\gamma_{AM} = \frac{k^2 P_s}{1 + k^2 P_s} = \frac{50}{197} = 0.2538$$

$$\gamma_{FM} = 3 \left(\frac{\Delta f}{B} \right)^2 P_s = 3 \left(\frac{58}{6} \right)^2 \frac{3}{2} = 420.5$$

Il rapporto tra il primo e il secondo γ vale dunque $6 \cdot 10^{-4}$.

Soluzione del problema 3.7

Se $s(t)$ è la modulante, il segnale AM-DSB corrispondente è

$$x(t) = A(1 + ks(t)) \cos \omega_0 t$$

In uscita dal blocco non lineare avremo

$$\begin{aligned} y(t) &= A^2(1 + ks(t))^2 \cos^2 \omega_0 t + 3A(1 + ks(t)) \cos \omega_0 t \\ &= A^2(1 + k^2 s^2(t) + 2ks(t)) \frac{1 + \cos 2\omega_0 t}{2} + 3A(1 + ks(t)) \cos \omega_0 t \\ &= \frac{A^2}{2} + A^2 ks(t) + \frac{A^2 k^2 s^2(t)}{2} + \left(\frac{A^2}{2} + A^2 ks(t) + \frac{A^2 k^2 s^2(t)}{2} \right) \cos 2\omega_0 t \\ &\quad + 3A(1 + ks(t)) \cos \omega_0 t \end{aligned}$$

Lo spettro in uscita sarà dunque la somma di tre contributi (rappresentati separatamente in fig. 3.4):

- 1) $\frac{A^2}{2} + 3A \cos \omega_0 t + \frac{A^2}{2} \cos 2\omega_0 t$
- 2) $A^2 k s(t) + 3A k s(t) \cos \omega_0 t + A^2 k s(t) \cos 2\omega_0 t$
- 3) $\frac{A^2 k^2 s^2(t)}{2} + \frac{A^2 k^2 s^2(t)}{2} \cos 2\omega_0 t$

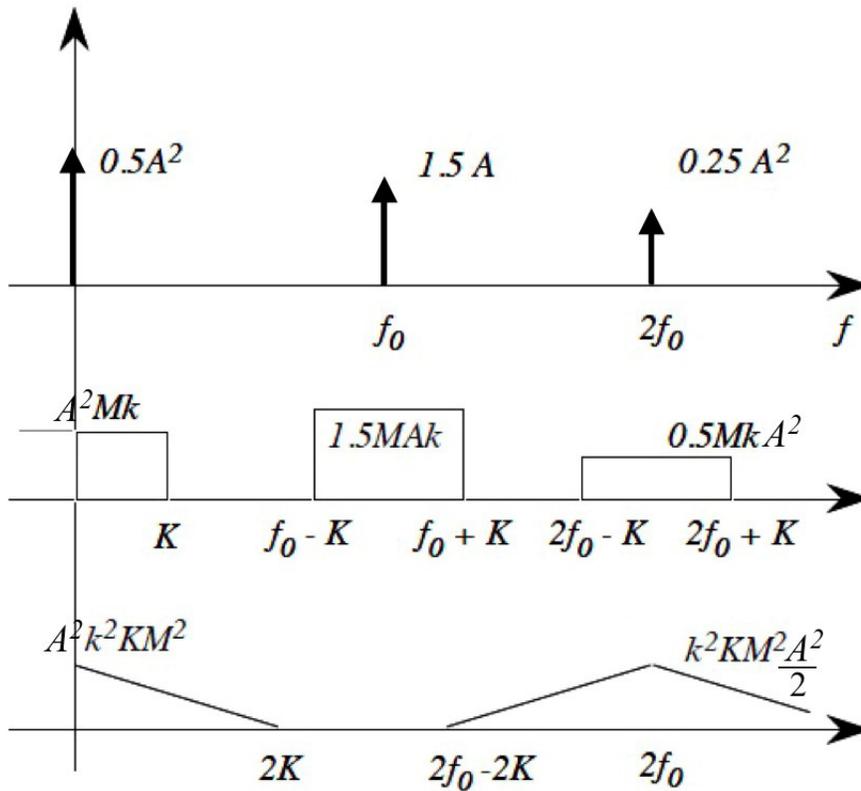


Figura 3.4

Mettendo un filtro con funzione di trasferimento $H(f)$ di valore 0 oltre la "frequenza di taglio" K , questi deve essere tale che la trasformata del segnale in uscita $y(t)$ sia costante (e pari a M) in questo intervallo.

Si parte dunque dal fatto che

$$Y(f) = H(f)X(f)$$

Le componenti dello spettro di $x(t)$ di interesse nell'intervallo $[0, K]$ sono

$$X(f) = \frac{A^2}{2} \delta(f) + A^2 M k + \frac{A^2 k^2 M^2}{2} (-|f| + 2K)$$

Trascurando la δ in 0, che rappresenta una continua facilmente eliminabile o comunque identificabile,

$$X(f) = A^2 M k + \frac{A^2 k^2 M^2}{2} (2K - |f|)$$

Se si vuole che $Y(f) = M$, ne consegue che

$$H(f) = \frac{2}{A^2 (2k + k^2 M (2K - |f|))} \quad |f| \leq K$$

è la funzione di trasferimento del filtro richiesto.

Osservazione

Il calcolo dello spettro di $S^2(t)$ è fatto, secondo il suggerimento del testo, come la *convoluzione* di $S(f)$ con se stesso, quindi

$$F(s^2(t)) = \int S(f - \lambda) S(\lambda) d\lambda.$$

Nel caso specifico, lo spettro è simmetrico, quindi $S(f) = S(-f)$. Sfruttando questa proprietà e scambiando i due termini del prodotto dentro l'integrale, la formula può essere riscritta come

$$F(s^2(t)) = \int S(\lambda) S(\lambda - f) d\lambda = R_S(f),$$

cioè la *correlazione* di $S(f)$.

Infine, sfruttando il fatto che la correlazione di un rettangolo ha una forma triangolare, si ottiene il risultato indicato nel grafico più basso di fig. 3.4.

Soluzione del problema 3.8

Si ricordi che, secondo l'approssimazione di Carson, un segnale FM a banda larga può essere considerato come un segnale con banda finita e pari a

$$B_c = 2(\beta + 1)f_m$$

ove f_m è la frequenza del segnale modulante, nel caso in cui quest'ultimo sia (co)sinusoidale.

Osservazione

Nel caso di un segnale modulante qualsiasi di banda B , la formula di Carson non può essere utilizzata direttamente nella forma indicata, perché β dipende per definizione da f_m e quindi cambia da frequenza a frequenza. Invece si usa una diversa formulazione della stessa espressione:

$$B_c = (2\beta + 1)f_m = 2\Delta f + f_m$$

che può essere generalizzata a

$$B_c = 2\Delta f + B$$

perché Δf è un parametro del sistema FM e non dipende dalla frequenza della modulante.

Lo spettro originale di un segnale FM con modellante cosinusoidale di ampiezza unitaria è esprimibile come

$$S_{FM}(f) = J_0(\beta) \cos 2\pi f_0 t + \sum_{i=-\infty, i \neq 0}^{+\infty} J_{|i|}(\beta) \cos 2\pi(f_0 + i f_m)t$$

Nella approssimazione di Carson, la serie in questa formula viene limitata ai termini che permettono di ricostruire un segnale con potenza pari al 98% del segnale FM completo e quindi

$$S_{FM}(f) \simeq J_0(\beta) \cos 2\pi f_0 t + \sum_{i=-\beta-1, i \neq 0}^{\beta+1} J_{|i|}(\beta) \cos 2\pi(f_0 + i f_m)t$$

Applicando questa formula al nostro problema (dopo aver diviso per $J_0(\beta)$ ambedue i termini) se ne ricava che si può ottenere un segnale FM in uscita dal circuito indicato nel testo del problema usando $2(\beta + 1) = 6$ sommatori.

Per ottenere il segnale FM richiesto, però, sarà necessario porre in ingresso al circuito il segnale $\cos 2\pi f_0 t$ e imporre le seguenti condizioni sulle frequenze degli oscillatori locali (OL_i) e sulle funzioni f_i :

- $OL_i = \cos 2\pi(f_0 + (i - 4)f_1)t$ per $i = 1, 2, 3$;
- $OL_i = \cos 2\pi(f_0 + (i - 3)f_1)t$ per $i = 4, 5, 6$;
- $f_i(x) = \frac{J_{i-4}(\beta)}{J_0(\beta)}x$ per $i = 1, 2, 3$;
- $f_i(x) = \frac{J_{i-3}(\beta)}{J_0(\beta)}x$ per $i = 4, 5, 6$.

Soluzione del problema 3.9

Supponendo il segnale di ingresso pari a $A \sin \omega t$, il segnale in uscita dall'*hard limiter*, $q(t)$, sarà come in fig. 3.5.

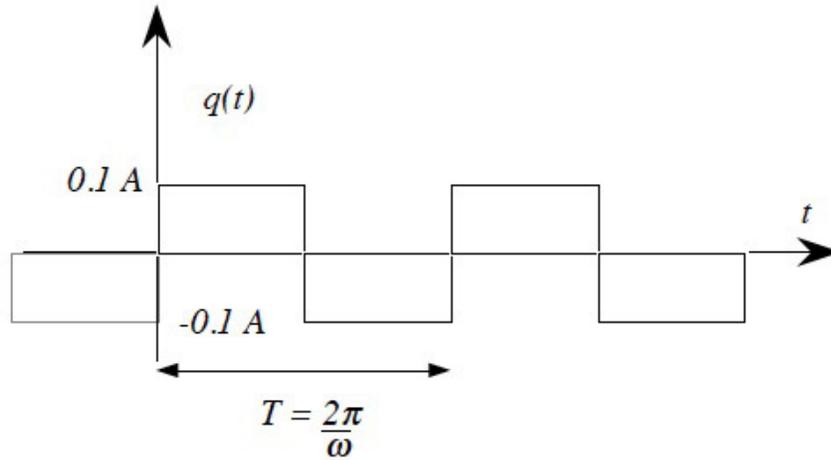


Figura 3.5 Il segnale $q(t)$.

In particolare, si noti che $q(t)$ è ancora periodico e dunque si potrà scrivere sotto forma di serie di Fourier bilatera

$$q(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn \frac{2\pi t}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{jn\omega t}$$

ove

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{A}{10} \frac{T}{2} \frac{1}{T} \operatorname{sinc} \left(n \frac{T}{2} \frac{1}{T} \right) e^{-j2\pi \frac{Tn}{4T}} - \frac{A}{20} \operatorname{sinc} \left(\frac{n}{2} \right) e^{j\frac{\pi n}{2}} \\ &= -j \frac{A}{10} \operatorname{sinc} \left(\frac{n}{2} \right) \sin \left(\frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Il filtro passabanda fornisce in uscita il segnale filtrato

$$f(t) = c_{-3} e^{-j3\omega t} + c_3 e^{j3\omega t}$$

Dato che

$$\begin{aligned} c_3 &= -j \frac{A}{10} \operatorname{sinc} \left(\frac{3}{2} \right) (-1) = j \frac{A}{15\pi} \\ c_{-3} &= -j \frac{A}{10} \operatorname{sinc} \left(\frac{3}{2} \right) (1) = -j \frac{A}{15\pi} \end{aligned} \quad (3.2)$$

se ne deduce che

$$f(t) = j \frac{A}{15\pi} (e^{j3\omega t} - e^{-j3\omega t})$$

$$f(t) = \frac{2A}{15\pi} \sin 3\omega t$$

Dunque, la percentuale di potenza in uscita è

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} \%$$

ove

$$P_{out} = \frac{1}{2} \frac{4A^2}{225\pi^2}$$

$$P_{in} = \frac{A^2}{2}$$

e perciò

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{4}{225\pi^2} = 0.0180 \quad (1.8\%)$$

Per quanto riguarda la seconda parte della domanda, visto che $f(t)$ e il segnale in ingresso sono due seni a fase 0, lo sfasatore non dovrà introdurre alcuno sfasamento (cioè lo sfasamento richiesto è nullo).

Osservazione

La catena costituita da un *hard limiter* seguito da un filtro passabanda corrisponde ad un modo per realizzare un blocco cosiddetto *moltiplicatore di frequenza*, utile ad esempio nei modulatori FM. Il sistema si realizza in pratica con un amplificatore in saturazione seguito dal parallelo di una capacità e di una induttanza risonanti attorno all'armonica del segnale originale che si vuole estrarre.

La nota importante che si può trarre dall'esercizio è che la potenza in uscita dal filtro è una frazione molto piccola di quella in ingresso. Quindi un sistema di questo genere è altamente inefficiente e lo è ancora di più se il coefficiente di moltiplicazione (che vale 3 nell'esempio dell'esercizio) diventa più alto. Anche per questo motivo non conviene utilizzare moltiplicatori di frequenza con coefficiente di moltiplicazione elevato.

Soluzione del problema 3.10

Il generico segnale FM può essere scritto come

$$v_{FM}(t) = A \cos \left(2\pi f_0 t + k \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right)$$

In questo caso, il filtro passabanda, centrato in f_0 e con banda pari alla banda di Carson, lascia passare tutto il segnale (in prima approssimazione) e il derivatore fornisce in uscita

$$\frac{dv_{FM}(t)}{dt} = -A \sin \left(2\pi f_0 t + k \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right) [2\pi f_0 + ks(t)]$$

Supponendo che il rivelatore ad involuppo abbia una costante di tempo molto maggiore di $1/f_0$ e molto minore di $1/B$ (con B si indica la banda di $s(t)$), l'uscita sarà

$$v_0(t) = 2\pi f_0 + ks(t)$$

In questo caso, il filtro passabasso non produce alcun effetto e l'uscita è, a meno della costante $2\pi f_0$, il segnale modulante amplificato o deamplificato (rispettivamente, se $k > 1$ o $k < 1$) ma comunque indistorto.

Se, invece di $v_{FM}(t)$, in ingresso al demodulatore c'è del rumore bianco con densità spettrale (bilatera) pari a $\frac{N_0}{2}$, il filtro passabanda restringe la banda del rumore alla banda di Carson attorno a f_0 (e a $-f_0$) (fig. 3.6).

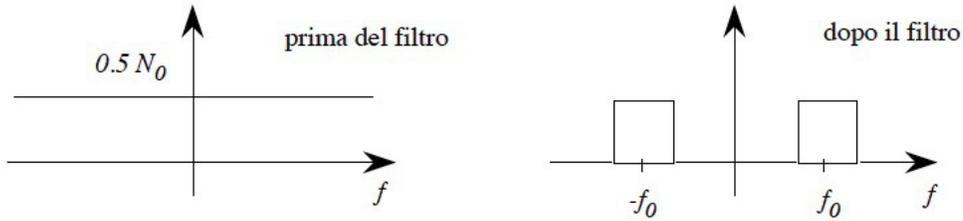


Figura 3.6

Il derivatore impone che la densità spettrale di potenza in ingresso sia moltiplicata per il modulo quadro della funzione di trasferimento per avere la densità spettrale di potenza in uscita. Quest'ultima quindi diviene

$$G_0(f) = \frac{N_0}{2} |j\omega|^2 = \omega^2 \frac{N_0}{2}$$

(sempre nella banda di Carson attorno a f_0 e a $-f_0$).

Il rivelatore ad involuppo trasporta il segnale dalla banda attorno a f_0 alla banda attorno a $f = 0$ (infatti, un segnale $A \cos 2\pi f_0 t$ darebbe in uscita al rivelatore uno zero fisso), dividendo la densità spettrale di potenza per 4, come si vede in fig. 3.7.

ove

$$G_2(f) = \omega^2 \frac{N_0}{8} \quad |\omega| \leq 2\pi(\beta + 1)f_m$$

Di conseguenza, il filtro passabasso con frequenza di taglio f_m taglia la gran parte di questa densità di potenza, che si riduce a

$$\tilde{G}_2(f) = \omega^2 \frac{N_0}{8} \quad |\omega| \leq 2\pi f_m$$

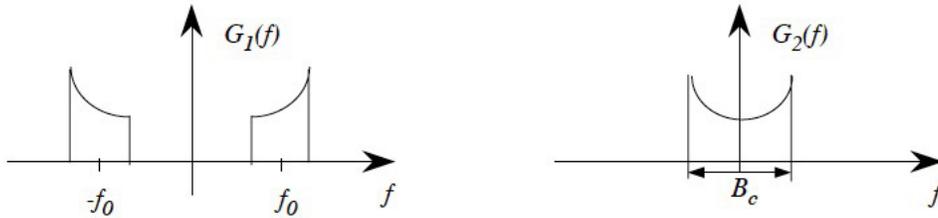


Figura 3.7

In questo caso la potenza in uscita sarà

$$\int_{-B}^B \tilde{G}_2(f) df = 2 \int_0^B 4\pi^2 f^2 \frac{N_0}{8} df = 8\pi^2 \frac{N_0}{8} \frac{f^3}{3} \Big|_0^B = \frac{\pi^2 N_0 B^3}{3}$$

Osservazione

Moltiplicare un segnale $s(t)$ per $\cos 2\pi f_0 t$ implica, come noto, ottenere un segnale $v(t)$ con spettro

$$V(f) = \frac{S(f - f_0) + S(f + f_0)}{2}$$

La densità spettrale di $v(t)$ è uguale, grazie al Teorema di Parseval, a

$$\begin{aligned} |V(f)|^2 &= V(f)V^*(f) = \frac{S(f - f_0) + S(f + f_0)}{2} \frac{S^*(f - f_0) + S^*(f + f_0)}{2} \\ &= \frac{|S(f - f_0)|^2}{4} + \frac{|S(f + f_0)|^2}{4} \end{aligned}$$

perché $S(f - f_0)S^*(f + f_0) = S^*(f - f_0)S(f + f_0) = 0$, in quanto i due segnali sono su due intervalli di frequenze diverse.

Soluzione del problema 3.11

Per non avere sovrapposizione bisogna calcolare la banda del secondo segnale. Secondo l'approssimazione di Carson

$$B_2 = 2(\beta_2 + 1)f_m = 2(0.5 + 1)100 = 300 \text{ Hz}$$

Dunque il secondo segnale si estende da 1.85 kHz ($2 - 0.15$ kHz) a 2.15 kHz ($2 + 0.15$ kHz). Perciò il primo segnale (per non sovrapporsi) potrà occupare da 1 kHz a 1.85 kHz (in alto) e altrettanto in basso. Dunque

$$B_1 = 2 \cdot 850 = 2(\beta_1 + 1)200 \text{ Hz} \implies \beta_1 = 2.125$$

Per il terzo segnale abbiamo due vincoli. La non sovrapposizione con il secondo richiede che la banda occupata non scenda da 2.5 oltre 2.15 kHz. In questo caso

$$B_3 = 2 \cdot 350 = 2(\beta_3 + 1)200 \text{ Hz} \implies \beta_3 = 0.75$$

L'altro vincolo è quello sulla banda complessiva, che non deve eccedere 3.5 kHz. Con le scelte effettuate fino ad ora, però, la banda complessiva occupata dai tre segnali va da 150 Hz a 2.85 kHz, quindi decisamente al di sotto del limite imposto. Per quanto riguarda la potenza, ogni segnale FM trasporta un valore di potenza indipendente dall'indice di modulazione. In particolare

$$P_{FM} = \frac{A^2}{2}$$

ove A è l'ampiezza della portante.

Perciò, dato che ogni segnale non può portare più di 1 W, si avrà

$$P_{FM_1} = P_{FM_2} = P_{FM_3} = 1 \text{ W} = \frac{A^2}{2} \implies A = \sqrt{2} \text{ V}$$

Infine, per quanto riguarda l'ultimo punto richiesto dal problema, va ricordato che lo spettro di un segnale modulato FM si può scrivere (supponendo la modulante sinusoidale) mediante una serie di funzioni di Bessel

$$v_{FM}(t) = J_0(\beta) \cos 2\pi f_0 t + \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} J_{|n|}(\beta) \cos [2\pi(f_0 + n f_m)t]$$

Da qui si deduce che la frazione di potenza trasportata *esattamente* alla frequenza della portante è

$$P_{f_0} = \frac{J_0^2(\beta)}{2}$$

Perciò, nel caso in esame,

$$P_{f_1} = \frac{J_0^2(2.125)}{2} = 0.01162$$

$$P_{f_2} = \frac{J_0^2(0.5)}{2} = 0.44036$$

$$P_{f_3} = \frac{J_0^2(0.75)}{2} = 0.37346$$

Osservazione

SI noti che la potenza alla frequenza della portante corrisponde ad una percentuale significativa della potenza complessiva solo per valori di β inferiori ad 1, cioè, come ci dice la teoria per segnali FM *a banda stretta*. Per segnali FM *a banda larga* e quindi con β maggiore di 1, la potenza invece si concentra nelle bande laterali. Questo è uno dei vantaggi della modulazione FM rispetto a quella AM, che richiede un'elevata potenza alla frequenza della portante nel caso si voglia utilizzare il demodulatore ad involuppo.

Soluzione del problema 3.12

Dato che $35 \cdot 7 = 235$ kHz e la banda assegnata è di soli 150 kHz, bisognerà filtrare i segnali in ingresso (prima o dopo la moltiplicazione) fino a ridurli a $150/7 \approx 20$ kHz circa. La cosa può essere fatta in due modi.

Si possono infatti mettere dei filtri passabanda opportuni dopo la modulazione come in fig. 3.8.

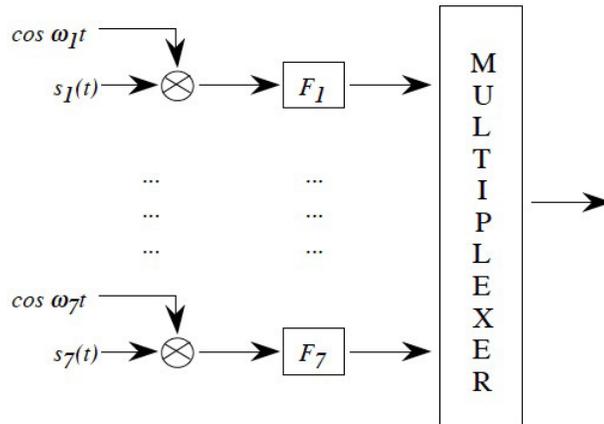


Figura 3.8 Soluzione mediante filtraggio in banda passante.

ove $\omega_n = (n - 1) 21$ kHz, $n = 1, 2, \dots, 7$.

In questo caso i filtri F_n sono filtri passabanda di banda 20 kHz, centrati a $(n - 1) 21 + 10$ kHz (supponendo di mantenere solo la banda superiore dei segnali modulanti).

L'alternativa è filtrare il segnale prima della modulazione come in fig. 3.9.

In questo caso i 7 filtri sono uguali (infatti, sono indicati tutti con la lettera F in figura) e fanno passare solo le frequenze positive fino a 20 kHz. Avremo perciò il vantaggio di un unico filtro, ma lo svantaggio che tale filtro non è reale (i filtri reali lavorano contemporaneamente sia sulle frequenze positive che su quelle negative).

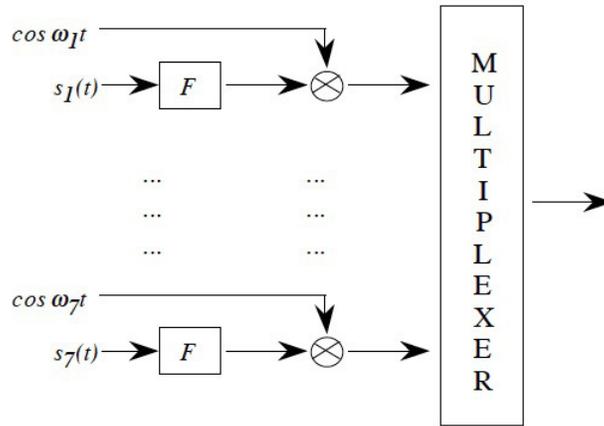


Figura 3.9 Soluzione mediante filtraggio in banda base.

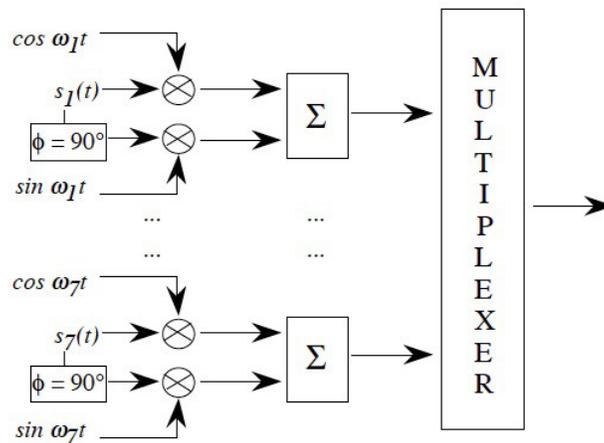


Figura 3.10 Soluzione mediante modulazione AM-SSB.

Osservazione

In realtà, un sistema di multiplexing come quello richiesto dal problema può essere realizzato fisicamente con circuiti tutti uguali a parte l'oscillatore locale solo utilizzando un modulatore SSB a sfasamento, basato sull'utilizzo di un blocco capace di effettuare uno sfasamento di $\pm\pi/2$ per le frequenze positive/negative, implementando di fatto la trasformata di Hilbert, come rappresentato nello schema di fig. 3.10.

Soluzione del problema 3.13

Ognuno dei 5 segnali AM-DSB occupa una banda di $2 \cdot 20 = 40$ kHz, mentre ogni segnale FM occupa una banda di $2(\beta + 1)10 = 2 \cdot 4 \cdot 10 = 80$ kHz (grazie all'approssimazione della banda di Carson).

La banda minima richiesta per la multiplazione in frequenza è dunque

$$B = 5 \cdot 40 + 3 \cdot 80 = 440 \text{ kHz}$$

Inoltre, il generico segnale AM-DSB è

$$v(t) = A(1 + ms(t)) \cos 2\pi f_0 t$$

con f_0 frequenza della portante e $s(t)$ segnale modulante. La sua potenza è

$$\overline{A^2(1 + ms(t))^2 \cos^2 \omega_0 t} = \frac{A^2}{2} \left(1 + m^2 \overline{s^2(t)}\right)$$

Se la potenza totale è pari a 5 W, ricordando che i segnali FM hanno potenza pari a $\frac{A^2}{2}$ ($A =$ ampiezza portante = 1V), si ha che la potenza di ogni segnale AM è

$$\frac{\left(5 - \frac{3}{2}\right)}{5} = \frac{7}{10} = 0.7$$

e dunque

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{2} \left(1 + m^2 \overline{s^2(t)}\right) &= 0.7 \\ m^2 \overline{s^2(t)} &= 0.4 \end{aligned}$$

Se $s(t)$ è una variabile casuale con densità di probabilità costante in $[-1,1]$, si ha che

$$\overline{s^2(t)} = \int_{-1}^1 s^2 f(s) ds = 2 \int_0^1 s^2 \frac{1}{2} ds = \frac{s^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

e dunque

$$m^2 \overline{s^2(t)} = \frac{m^2}{3} = \frac{4}{10} \quad \Rightarrow \quad m^2 = \frac{6}{5} \quad m = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

Osservazione

Si noti che il processo casuale che corrisponde al segnale $s(t)$ è un processo stazionario per definizione, perché il testo indica che il processo (che dipende dalla variabile t) è in realtà assimilabile ad una variabile casuale, indipendente da t .

Inoltre, per un processo casuale $X(t)$, la definizione di potenza è proprio

$$P_X = \int X^2 f_X(x) dx$$

dove $f_X(x)$ è la funzione densità di probabilità (indipendente dal tempo perché il segnale è stazionario) del processo $X(t)$.

Soluzione del problema 3.14

Modulando i segnali AM mediante la modulazione a singola banda laterale, essi occupano

$$B_{AM} = 3 \cdot 20 = 60 \text{ kHz}$$

lasciando gli altri 90 MHz ai canali FM. In questo caso (supponendo i due canali FM con lo stesso Δf)

$$2(\Delta f + B) = 2(\Delta f + 10) = 45 \text{ kHz}$$

per la regola di Carson, e quindi

$$\Delta f = \frac{25}{2} = 12.5 \text{ kHz}$$

La potenza di ogni segnale FM è

$$\frac{A^2}{2} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = 1 \text{ W}$$

e dunque 3.5 W sono lasciati ai segnali AM, ognuno con circa 1.16 W.

La potenza dei segnali modulanti è

$$P_s = \int_{-20000}^{+20000} 5e^{-|f|} df = 2 \int_0^{+20000} 5e^{-f} df = 2(5 - e^{-20000}) \simeq 10 \text{ W}$$

Ricordando che la potenza di un segnale AM-SSB è $\frac{A^2 m^2 P_s}{4}$, si avrà

$$\frac{A^2 m^2 10}{4} = \frac{m^2 10}{2} = \frac{35}{30} \implies m^2 = \frac{7}{30} \implies m = \sqrt{\frac{7}{30}}$$

Soluzione del problema 3.15

Indicando con $v_1(t)$ e $v_2(t)$ le uscite rispettivamente del primo e del secondo modulatore:

$$v_1(t) = A_c(1 + kx(t))\cos(2\pi f_c t)$$

$$v_2(t) = A_c(1 - kx(t))\cos(2\pi f_c t)$$

L'uscita $y(t)$ risulta essere

$$y(t) = v_1(t) - v_2(t) = 2A_c kx(t) \cos(2\pi f_c t)$$

corrispondente all'uscita di un modulatore AM DSB-SC.

Osservazione

E' interessante notare come il risultato trovato rappresenti un esempio di implementazione di un modulatore prodotto sfruttando la semplicità realizzativa del modulatore AM standard.

Essendo la potenza media di un generico segnale modulato AM DSB-SC espressa dalla formula $\frac{A^2 P_m}{2}$, la potenza media di $y(t)$ è:

$$\frac{4A_c^2 k^2 P_x}{2} = 2A_c^2 k^2 P_x$$

dove P_x è la potenza media del segnale modulante in ingresso $x(t)$ e può essere calcolata come integrale della densità spettrale di potenza di $x(t)$, rappresentata in figura 3.11.

$$P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df = 0.5 \cdot 20 \cdot 10^3 = 10 \text{ kW}$$

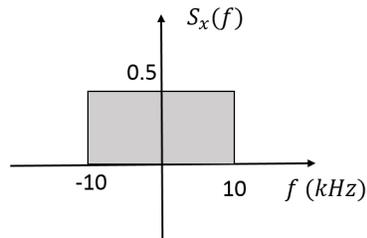


Figura 3.11 La densità spettrale di potenza del segnale $x(t)$.

Risulta quindi che la potenza media di $y(t)$ è:

$$P_y = 2A_c^2 k^2 P_x = 2 \cdot 10 \cdot 10^3 = 20 \text{ kW}$$

Soluzione del problema 3.16

Nelle condizioni indicate dall'esercizio, l'indice di modulazione massimo è:

$$k_{max} = \frac{1}{|\min(s(t))|} = \frac{1}{|-1|} = 1$$

Osservazione

Dato $s(t)$ è un segnale casuale stazionario con funzione di densità di probabilità definita nell'intervallo $[-1, 5]$, i suoi valori possono esistere solo in quell'intervallo. Di conseguenza, il minimo di $s(t)$ sarà pari a -1.

Ricordando che la potenza di un segnale modulato AM è data:

$$P_{AM} = \frac{A^2}{2} (1 + k^2 P_s)$$

Risulta possibile calcolare l'indice di modulazione imponendo:

$$P_{AM} = (2 + P_s)/2, \quad (3.3)$$

da cui si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{(\sqrt{2})^2}{2} (1 + k_1^2 P_s) &= \frac{2 + P_s}{2} \\ 1 + k_1^2 P_s &= 1 + \frac{P_s}{2} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Si evince quindi che l'indice di modulazione risulta essere:

$$k = \min\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Essendo $v(t)$ periodico di periodo $T_0 = 1$ ms, è rappresentabile mediante serie di Fourier:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi f_n t}$$

con $f_n = \frac{n}{T_0} = n \cdot 1$ KHz.

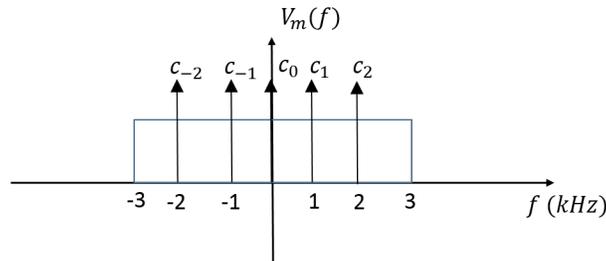


Figura 3.12 Lo spettro del segnale $v_m(t)$ in uscita dal filtro passabasso.

Lo spettro del segnale modulante $v_m(t)$, rappresentato in figura 3.12, è ottenuto filtrando lo spettro di $v(t)$ mediante un filtro passabasso ideale avente frequenza di taglio $f_T = 2.8$ kHz.

Ne risulta quindi che la massima frequenza del segnale modulante $v_m(t)$ corrisponde a:

$$f_m = f_2 = 2 \cdot 1 \cdot 10^3 = 2 \text{ KHz}$$

La banda del segnale modulato FM è quindi uguale a:

$$B_{FM} = 2(f_m + \Delta f) = 2(2 \cdot 10^3 + 100) = 4.2 \text{ kHz}$$

mentre quella del segnale AM è $B_{AM} = 2B = 2 \cdot 1 \cdot 10^3 = 2 \text{ kHz}$.

La banda di guardia tra i due segnali modulati si può quindi calcolare nel modo seguente:

$$B_g = B_{TOT} - B_{AM} - B_{FM} = (10 - 2 - 4.2) \cdot 10^3 = 3.8 \text{ kHz}$$

Per calcolare infine l'ampiezza della portante FM possiamo sfruttare le equazioni seguenti:

$$P_{FM} = \frac{A_{FM}^2}{2}$$

$$P_{TOT} = P_{FM} + P_{AM}$$

dove P_{FM} e P_{AM} rappresentano rispettivamente la potenza del segnale FM e quella del segnale AM, mentre $P_{TOT} = 5 \text{ W}$.

P_{AM} può essere calcolata impiegando l'equazione 3.3, dove l'unica incognita P_S può essere trovata sfruttando il fatto che il segnale casuale $s(t)$ è distribuito uniformemente nell'intervallo $[-1, 5]$ (vedi figura 3.13):

$$P_s = \overline{s^2} = \int_a^b s^2 f_S(s) ds = \int_{-1}^5 \frac{s^2}{6} ds = \frac{1}{6} \frac{s^3}{3} \Big|_{-1}^5 \simeq 7 \text{ W}$$

Ne segue che:

$$P_{AM} = 1 + \frac{P_S}{2} = 1 + \frac{7}{2} = 4.5 \text{ W}$$

$$P_{FM} = P_{TOT} - P_{AM} = 5 - 4.5 = 0.5 \text{ W}$$

$$A_{FM} = \sqrt{2P_{FM}} = \sqrt{2 \cdot 0.5} = \sqrt{1} = 1 \text{ V}$$

Osservazione

L'ascissa di $f_S(s)$ è stata determinata tenendo che conto che

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_S(s) ds = 1.$$

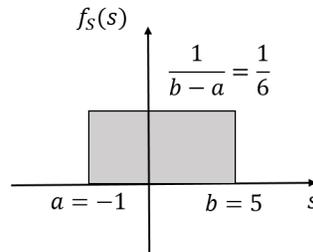


Figura 3.13 La funzione densità di probabilità della variabile casuale $S = s(t)$, a t fissato.

Soluzione del problema 3.17

Essendo la banda di $s_1^2(t)$ uguale al doppio della banda di $s_1(t)$, la banda del primo segnale modulato AM risulta essere:

$$B_{AM} = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10^3 = 20 \text{ kHz}$$

La banda occupata dal primo segnale modulato è quindi pari a [530, 550] kHz, con portante centrata a 540 kHz.

Essendo la banda della derivata di un segnale uguale alla banda del segnale stesso, la larghezza di banda del secondo segnale modulato DSB-SC risulta essere:

$$B_{AM} = 2 \cdot 3 \cdot 10^3 = 6 \text{ kHz}$$

Quindi, la banda occupata dal secondo segnale modulato è quindi pari a [584, 590] kHz, con portante centrata a 587 kHz.

La porzione di banda a disposizione della modulazione FM risulta dunque essere l'intervallo [590, 610] kHz, rappresentata schematicamente nella figura seguente.

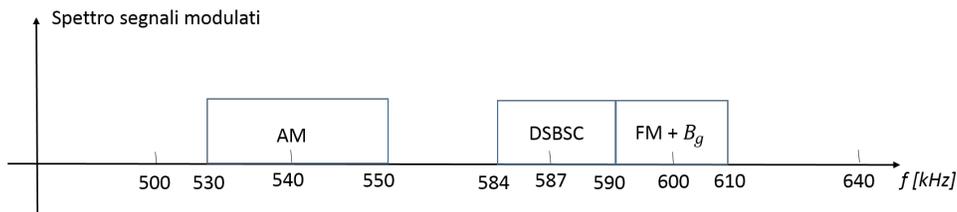


Figura 3.14 L'occupazione di banda dei segnali modulati indicati nel problema.

Si noti inoltre che la banda di $s_3(t)$ rimane invariata dopo l'attraversamento del blocco di ritardo 10 ms: $f_m = 4 \text{ kHz}$.

La banda di guardia vale dunque

$$B_g = \frac{12.5}{100} \cdot 20 \cdot 10^3 = 2.5 \text{ kHz}$$

mentre la banda del segnale FM (banda di Carson) risulta:

$$B_c = (20 - 2.5) \cdot 10^3 = 17.5 \text{ kHz}$$

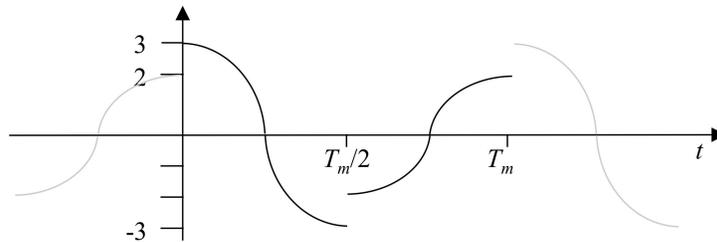
Infine, per quanto riguarda il Δf corrispondente:

$$B_c = 2(\Delta f + f_m) \implies \Delta f = \frac{B_c - 2f_m}{2} = \frac{9.5}{2} = 4.75 \text{ kHz}.$$

Dalla figura 3.14 si evince che gli intervalli di frequenza utilizzabili per eventuali altri segnali modulati (escludendo la banda di guardia) sono: [500, 530], [550, 584], [610, 640] kHz.

Soluzione del problema 3.18

Il segnale $s(t)$ ha un grafico come in figura.



Si vede dunque che il suo minimo è -3. Tale informazione è utile per il calcolo dell'indice di modulazione della modulazione AM-DSB. Infatti, il valore massimo possibile di k si ottiene imponendo che

$$1 + k \left(\min_t s(t) \right) = 1 + k(-3) = 0,$$

da cui $k = 0.33$.

Per il calcolo di γ si deve ricordare la formula per la modulazione AM-DSB, che è

$$\gamma = \frac{k^2 P_s}{1 + k^2 P_s},$$

dove P_s è la potenza del segnale modulante ($s(t)$ in questo esercizio).

Per trovare il valore di γ bisogna quindi calcolare la potenza del segnale. Tenendo conto della forma del segnale nella figura di cui sopra, il segnale $s(t)$ può essere pensato come un segnale che per metà del suo periodo è pari ad un coseno di ampiezza 3 e per l'altra metà ad un coseno di ampiezza -2. Quindi la sua potenza si può ottenere come la somma di metà della potenza di un coseno di ampiezza 3 e di metà della potenza di un coseno di ampiezza (-)2.

$$P_s = \frac{1}{2} \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \frac{4}{2} = \frac{13}{4}$$

Quindi, alla fine:

$$\gamma = \frac{(0.33)^2 \frac{13}{4}}{1 + (0.33)^2 \frac{13}{4}} = \frac{0.353925}{1.353925} = 0.2614$$

Osservazione

Per formalizzare il calcolo della potenza di $s(t)$, si noti che la sua espressione può essere riscritta come

$$s(t) = 3 \cos(\omega_m t) v_1(t) - 2 \cos(\omega_m t) v_2(t)$$

dove

$$v_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{2(t - nT_m)}{T_m} \right)$$

$$v_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{2(t - nT_m - T_m/2)}{T_m} \right)$$

Dato che il segnale è periodico, la potenza si calcola come

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} s^2(t) dt \\ &= \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} (3 \cos(\omega_m t) v_1(t) - 2 \cos(\omega_m t) v_2(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} 9 \cos^2(\omega_m t) v_1^2(t) dt \\ &\quad + \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} 4 \cos^2(\omega_m t) v_2^2(t) dt \\ &\quad - \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^{T_m/2} 6 \cos^2(\omega_m t) v_1(t) v_2(t) dt \end{aligned}$$

A questo punto, si noti che

$$\begin{aligned} v_1(t) &= 0 & -T_m/2 \leq t < 0 \\ v_2(t) &= 0 & 0 < t \leq T_m/2 \\ v_1(t)v_2(t) &= 0 & |t| \leq T_m/2 \end{aligned}$$

Quindi, il terzo integrale vale 0, mentre i primi due si possono ridurre a

$$\begin{aligned} P_s &= \frac{1}{T_m} \int_0^{T_m/2} 9 \cos^2(\omega_m t) + \frac{1}{T_m} \int_{-T_m/2}^0 4 \cos^2(\omega_m t) dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \frac{4}{2} \end{aligned}$$

Soluzione del problema 3.19

Il segnale (con il rumore in aggiunta) all'ingresso del demodulatore (AM o FM) è:

$$s(t) = 5 \sin \omega t + B \sin \omega t + 2B \cos(\omega + \Delta\omega)t$$

In uscita al demodulatore ad involuppo, supponendo che $\frac{2\pi}{\omega}$ sia \ll del tempo di risposta del demodulatore stesso) si avrà:

$$\begin{aligned} s(t) &= (5 + B - 2B \sin \Delta\omega t) \sin \omega t + 2B \cos \omega t \cos \Delta\omega t \\ v_{AM}(t) &= \sqrt{(5 + B - 2B \sin \Delta\omega t)^2 + (2B \cos \Delta\omega t)^2} \\ &= \sqrt{25 + B^2 + 10B - 20B \sin \Delta\omega t - 4B^2 \sin \Delta\omega t + 4B^2} \\ &= \sqrt{25 + 5B^2 + 10B - (20B + 4B^2) \sin \Delta\omega t} \end{aligned}$$

In uscita invece al demodulatore FM, rappresentato schematicamente da un derivatore seguito da un rivelatore ad involuppo, si avrà

$$\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= 5\omega \cos \omega t + B\omega \cos \omega t - 2B(\omega + \Delta\omega) \sin(\omega + \Delta\omega)t \\ v_{FM}(t) &= \sqrt{[5\omega + B\omega - 2B(\omega + \Delta\omega) \cos \Delta\omega t]^2 + [2B(\omega + \Delta\omega) \sin \Delta\omega t]^2} \\ &= \sqrt{(5 + B)^2 \omega^2 - 20B\omega\Omega \cos \Delta\omega t - 4B^2\omega\Omega \cos \Delta\omega t + 4B^2\Omega^2} \end{aligned}$$

dove $\Omega = \omega + \Delta\omega$.

Nei due casi:

$$P_{AM}(t) = \overline{v_{AM}^2} = 25 + 5\overline{B^2} + 10\overline{B} - (20\overline{B} + 4\overline{B^2}) \sin \Delta\omega t$$

$$P_{FM}(t) = \overline{(5 + B)^2 \omega^2 - 20\overline{B}\omega\Omega \cos \Delta\omega t - 4\overline{B^2}\omega\Omega \cos \Delta\omega t + 4\overline{B^2}\Omega^2}$$

La potenza istantanea è quindi funzione del tempo. Invece, la potenza media in un periodo T_m vale:

$$\begin{aligned} \overline{P_{AM}} &= 25 + 5\overline{B^2} + 10\overline{B} \\ \overline{P_{FM}} &= \overline{(5 + B)^2 \omega^2} + 4\overline{B^2}\Omega^2 \end{aligned}$$

Infatti, i termini in $\cos \Delta\omega t$ e $\sin \Delta\omega t$ danno valor medio nullo sul periodo $T = \frac{2\pi}{\omega}$, che è un multiplo di $T' = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ (esattamente, è lungo 5 volte tanto). Introducendo le informazioni sulla funzione densità di probabilità di B

$$\begin{aligned}\bar{B} &= 2.5 \\ \overline{B^2} &= \int_0^5 B^2 \frac{1}{5} dB = \frac{25}{3} \\ \omega &= 50 \text{ rad/sec} \\ \Delta\omega &= 10 \text{ rad/sec}\end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned}\overline{P_{AM}} &= 58.33 \text{ W} \\ \overline{P_{FM}} &= 265702 \text{ W}\end{aligned}$$

Si noti che la differenza di quasi 4 ordini di grandezza tra la potenza AM e quella FM è dovuta essenzialmente al termine moltiplicativo in ω^2 .

Osservazione

Si può osservare che il processo casuale di cui si calcola la potenza (segnale modulato AM o FM) non è stazionario. a causa della presenza del termine dipendente dal coseno. In effetti $B \sin \omega t$ non è stazionario, avendo come media $\bar{B} \sin \omega t$, che dipende dal tempo.

Soluzione del problema 3.20

Utilizzando le proprietà della trasformata di Fourier, lo spettro di $s^2(t)$ è ottenibile mediante la formula

$$F[s^2(t)] = S(f) * S(f)$$

e può essere facilmente desunta dallo spettro costante di $s(t)$, come mostrato in figura 3.15.

Il valore massimo della convoluzione K è stato calcolato considerando i valori di frequenza corrispondenti alla moltiplicazione di due rettangoli uguali, perfettamente sovrapposti:

$$K = (10^{-3})^2 \cdot 20 \cdot 10^3 = 20 \cdot 10^{-3}$$

La potenza di $s(t)$ può essere agevolmente calcolata sfruttando il teorema di Parseval:

$$P_s = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df = (10^{-3})^2 \cdot 20 \cdot 10^3 = 20 \text{ mW}$$

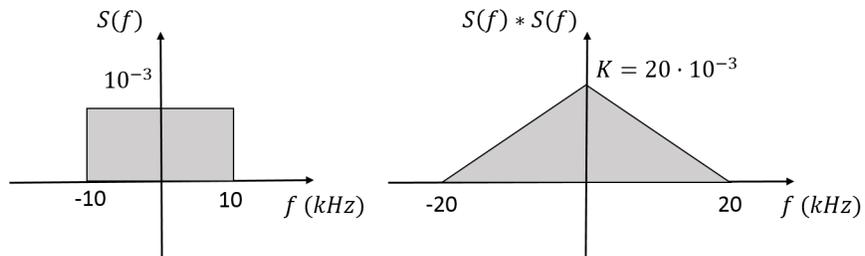


Figura 3.15 Gli spettri di $s(t)$ e $s^2(t)$.

Sapendo che la deviazione di frequenza della modulazione FM è $\Delta f = 30$ kHz:

$$\gamma = \frac{3(\Delta f)^2}{B^2} P_s = \frac{3 \cdot (30 \cdot 10^3)^2}{(10 \cdot 10^3)^2} \cdot 20 \cdot 10^{-3} = 0.54$$

Infine la potenza del segnale modulato dipende solo dall'ampiezza della portante A :

$$P_{FM} = \frac{A^2}{2} = \frac{2^2}{2} = 2 \text{ W.}$$

4

Problemi sul campionamento

Problema	Argomento	Difficoltà
4.1	Modulazione PCM, AM e FM	**
4.2	Equalizzazione e campionamento	***
4.3	Campionamento “sample and hold”	**
4.4	Campionamento non standard	**
4.5	Sottocampionamento	**
4.6	Sovracampionamento	*
4.7	Campionamento di un processo stazionario	**
4.8	Campionamento di un processo stazionario	***
4.9	Segnali con errore di campionamento casuale	**
4.10	Banda di un segnale campionato	*
4.11	Campionamento e quantizzazione	**

Problema 4.1

Sia dato il segnale

$$v(t) = \frac{\sin \left[\pi a_1 \cdot 10^3 \left(t - \frac{T_1}{2} \right) \right]}{a_1}$$

con $a_1 = 3$ e $T_1 = 2.3$ s.

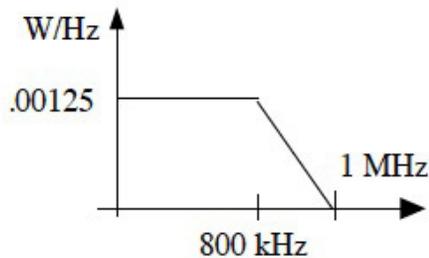
Supponendo di trasmettere $v(t)$ mediante una modulazione PCM, si calcoli il numero di bit necessari sapendo che l'errore di quantizzazione massimo è pari a $e_{max} = 0.00146484375$, e il tempo di bit richiesto.

Assumendo invece di trasmettere lo stesso segnale con una modulazione AM, si calcoli il valore massimo dell'indice di modulazione e s'imponga l'ampiezza della portante in modo che la potenza del segnale modulato sia 3 volte quella di $v(t)$, assumendo di impiegare l'indice di modulazione massimo.

Considerando infine l'opzione di trasmettere lo stesso segnale modulante mediante una modulazione FM con una deviazione di frequenza pari ad 1/10 della banda del segnale, si calcoli la banda del segnale trasmesso.

Problema 4.2

Sia dato un segnale la cui densità spettrale di potenza è disegnata in figura, in ingresso ad un equalizzatore (filtro che dà in uscita uno spettro costante in ampiezza). Determinare la funzione di trasferimento dell'equalizzatore sapendo che la potenza in uscita deve essere pari ad 1 W. Calcolare poi il tempo di campionamento massimo del segnale prima e dopo l'equalizzatore. Trovare infine tali tempi di campionamento nel caso in cui si supponga di usare una banda di guardia tra le repliche in frequenza del segnale di partenza pari al 10% della banda del segnale stesso.



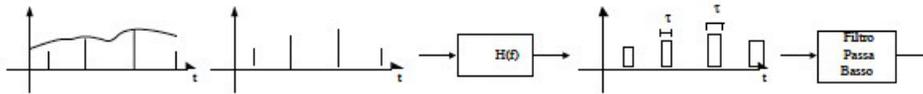
Determinare la banda necessaria a trasmettere il segnale campionato, quantizzato con una precisione superiore allo 0.1%.

Problema 4.3

Sia un segnale $s(t)$ con spettro costante (modulo = 1) nella banda $[0 - 1\text{kHz}]$. Si supponga di campionare tale segnale con il tempo di campionamento massimo possibile. Tali campioni passano attraverso un blocco lineare che trasforma i campioni istantanei in rettangoli con la stessa altezza ma di durata $\tau = 100 \mu\text{s}$.

Determinare:

1. il tempo di campionamento del segnale;
2. la funzione di trasferimento $H(f)$ del blocco che trasforma i campioni in rettangoli;
3. lo spettro del segnale $y(t)$ in uscita dal sistema, supponendo che il filtro passa basso finale abbia banda pari a 1 kHz.



Problema 4.4

Calcolare lo spettro del segnale in uscita dal blocco in figura, sapendo che il segnale $s(t)$ ha uno spettro costante nell'intervallo $(-B, B)$ e che il filtro passabasso ha banda pari a $1.1 B$, nei sei casi:

$$v(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - i\tau) \quad \tau = \frac{1}{B}, \frac{1}{2B}, \frac{1}{4B}$$

$$v(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t - i/(2B)}{\tau}\right) \quad \tau = \frac{1}{B}, \frac{1}{2B}, \frac{1}{4B}$$

Problema 4.5

Si consideri un segnale con banda 30 kHz, spettro costante in quella banda con valore di $5 \cdot 10^{-5} \text{ V/Hz}$. Il segnale viene sottocampionato ad $1/3$ della frequenza di Nyquist. In ricezione, il segnale è recuperato attraverso un filtro passabasso con banda pari alla banda originale del segnale.

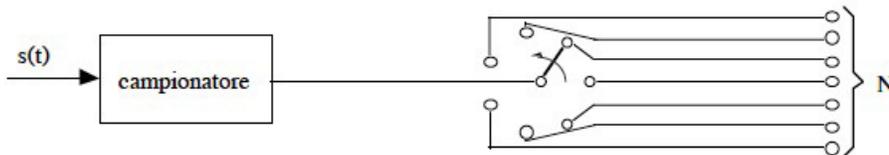
Determinare:



- lo spettro del segnale dopo il campionamento;
- lo spettro del segnale ricevuto;
- l'espressione nel tempo del segnale ricevuto;
- l'indice di modulazione supponendo di trasmettere il segnale originale in modulazione AM-DSB;
- il coefficiente γ per questa scelta dell'indice di modulazione, supponendo che la portante abbia ampiezza 1.

Problema 4.6

Sia dato lo schema in figura e si supponga che il segnale $s(t)$ in ingresso abbia una banda di 4 kHz e che il campionatore abbia un tempo di campionamento $T_s = 25\mu s$. L'interruttore rotante collega l'unico ingresso ad una uscita cambiando ogni T_s secondi.



Determinare:

1. il numero massimo di uscite N affinché ad ogni uscita sia possibile ricostruire una copia indistorta del segnale $s(t)$;
2. la potenza media di ogni uscita in questo caso, sapendo che la potenza media del segnale $s(t)$ è 1 W.

Problema 4.7

Si supponga di avere un segnale $s(t)$ che può assumere un valore casuale tra $-A$ e A ($A = 1V$). Tale segnale viene trasmesso PCM con una precisione migliore dello 0.5%.

Determinare:

1. il numero n di bit necessari, e l'ampiezza dell'intervallo Δ rappresentato da ogni combinazione di n bit;
2. l'errore medio che si compie nell'intervallo $[-\Delta/2, \Delta/2]$, supponendo che la funzione densità di probabilità di $s(t)$ ad ogni istante t sia nulla altrove e costante solo in questo intervallo;
3. lo stesso errore se la funzione densità di probabilità è un triangolo isoscele con base $[-\Delta/2, \Delta/2]$;
4. l'errore quadratico medio nelle due situazioni precedenti.

Problema 4.8

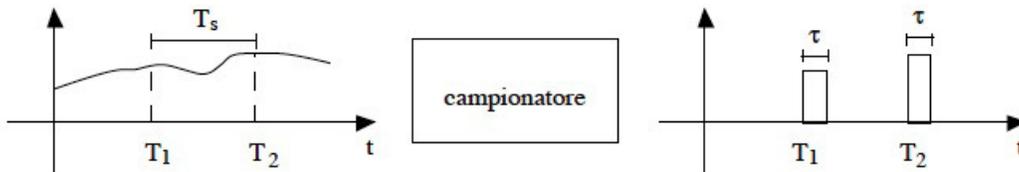
Si supponga di avere un segnale $x(t)$ rappresentabile, istante per istante, con la variabile casuale X o con la variabile X' , la prima con funzione densità di probabilità pari a kx per $0 \leq x \leq 4$, la seconda con densità di probabilità $k'(4 - x')$ nello stesso intervallo.

Trovare il rapporto segnale-rumore di quantizzazione S/N se $x(t)$ viene campionato e quantizzato con una precisione minima dello 0.5% sia nel caso in cui sia rappresentato da X che da X' .

Ripetere inoltre il calcolo se $x(t)$ sia rappresentato dalla variabile casuale in uscita al blocco $y = 2x' - x'^2/4$.

Problema 4.9

Si supponga di avere un segnale $s(t)$ con ampiezza istantanea esprimibile mediante una variabile casuale con densità di probabilità costante nell'intervallo $[0, A]$. Tale segnale viene modulato PAM come in figura.



Calcolare la potenza media del segnale campionato. Si supponga inoltre di trasformare il segnale PAM in un segnale PCM con precisione superiore al 10%, ove ogni bit di codifica è rappresentato da un impulso di altezza B e durata δ (se il bit vale 1) oppure da nessun impulso (se il bit vale 0).

Calcolare:

1. l'energia media di un bit;
2. la potenza media del segnale PCM.

Problema 4.10

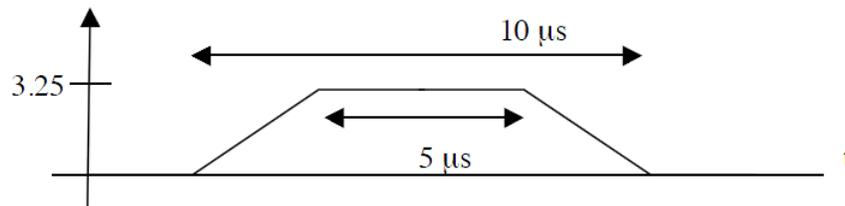
Si consideri un segnale digitale ottenuto da una sequenza di byte che rappresentano campioni di un segnale analogico. Il segnale digitale viaggia ad una velocità di 1Gb/sec.

Si calcoli il tempo di bit, la banda del segnale analogico originale assumendo un campionamento alla frequenza di Nyquist.

Si calcoli infine la potenza del rumore di quantizzazione introdotta dal processo di digitalizzazione, sapendo che il segnale originale assume valori tra 0 e 5.

Problema 4.11

Si consideri il segnale in figura.



1. Si scelga e si giustifichi un criterio per definirne la banda in modo che sia finita.
2. Sulla base di questo criterio si definisca quanto deve essere lunga la stringa di bit necessaria per trasmettere il segnale, assumendo che la quantizzazione venga fatta con una precisione percentuale dello 0.5%.
3. Infine, assumendo che il bit 0 sia rappresentato da un rettangolo alto A e lungo il tempo di bit, mentre il bit 1 sia rappresentato da un triangolo isoscele di altezza $-A$ con la stessa durata, si calcoli qual debba essere il valore di A per avere una potenza media di 1 W, assumendo che i bit 0 e 1 siano equiprobabili.

4.1 Soluzione dei problemi

Soluzione del problema 4.1

Essendo il segnale essenzialmente un seno moltiplicato per una costante:

$$v(t) = \frac{1}{a_1} \sin \left[2\pi \frac{a_1}{2} \cdot 10^3 \left(t - \frac{T_1}{2} \right) \right]$$

la frequenza (e quindi la banda) del segnale sarà

$$B = \frac{a_1 \cdot 10^3}{2}$$

Di conseguenza, il tempo di campionamento è quindi dato da:

$$T_c = \frac{1}{2B} = \frac{1}{a_1 \cdot 10^3} = \frac{1}{3} \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

Infine, l'errore di quantizzazione sarà:

$$\frac{\Delta}{2} = \frac{R}{2N} = \frac{2}{a_1} \cdot \frac{1}{2N} \leq e_{max}$$

dove Δ è l'intervallo di quantizzazione, R è la dinamica massima del segnale ed N il numero di livelli del segnale quantizzato.

Osservazione

Essendo il segnale in ingresso al modulatore PCM una sinusoidale, la sua dinamica è pari al doppio dell'ampiezza della sinusoidale:

$$R = \frac{2}{a_1}$$

Si ricava quindi che il numero di livelli deve soddisfare:

$$N \geq \frac{1}{a_1 e_{max}} \simeq 227.56$$

Il numero di bit necessari è quindi dato da:

$$n_b \geq \log_2(227.56) \simeq 7.8$$

$$n_b = 8 \text{ bit}$$

Mentre il tempo di bit:

$$T_b = \frac{T_c}{n_b} = \frac{1}{3 \cdot 8} \cdot 10^{-3} \simeq 4.17 \cdot 10^{-5} = 41.7 \mu\text{s}$$

Supponendo di modulare AM il segnale $v(t)$:

$$v_{AM}(t) = A(1 + kv(t))\cos(\omega_0 t)$$

L'indice di modulazione massimo è:

$$k_{max} = \frac{1}{|\min(v(t))|} = \frac{1}{1/a_1} = 3$$

Imponendo che la potenza del segnale modulato AM sia pari a 3 volte la potenza P_v del segnale $v(t)$:

$$P_{AM} = \frac{A^2}{2} (1 + k^2 P_v) = 3P_v$$

$$A = \sqrt{\frac{6P_v}{1 + k_{max}^2 P_v}}$$

Sostituendo $P_v = \left(\frac{1}{a_1}\right)^2 \frac{1}{2} = 0.0556$, ed $a_1^2 = 9$:

$$A = 0.4715$$

Supponendo invece di utilizzare la modulazione FM, la banda di Carson con una deviazione di frequenza pari ad 1/10 della banda del segnale B è:

$$B_c = 2(\Delta f + B) = 2B \left(\frac{1}{10} + 1 \right) = 2 \frac{11}{10} B = 2 \frac{11}{10} \frac{a_1 \cdot 10^3}{2} = 3.3 \text{ kHz}$$

Soluzione del problema 4.2

Chiamando $H(f)$ la funzione di trasferimento dell'equalizzatore, e $G(f)$ la densità spettrale di potenza in figura, la densità $G_0(f)$ in uscita dall'equalizzatore sarà

$$G_0(f) = G(f)|H(f)|^2 = k$$

ove k è tale che

$$\int_0^{1 \text{ MHz}} k df = 1 \text{ W}$$

$$\implies k = 10^{-6} \text{ W/Hz.}$$

La funzione $|H(f)|$ può essere individuata a tratti imponendo che

$$|H(f)|^2 = \begin{cases} k' & 0 \leq f \leq 800 \text{ kHz} \\ [G(f)]^{-1}k & 800 \text{ kHz} < f \leq 1 \text{ MHz} \end{cases}$$

ove

$$0.00125k' = k = 10^{-6} \implies k' = \frac{10^{-6}}{1.25 \cdot 10^{-3}} = \frac{10^{-3}}{1.25} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ W/Hz}$$

e

$$G(f) = (10^6 - f) \frac{0.00125}{200 \cdot 10^3} = (10^6 - f) 0.625 \cdot 10^{-8}$$

Dunque

$$|H(f)|^2 = \begin{cases} 8 \cdot 10^{-4} & 0 \leq f \leq 800 \text{ kHz} \\ \frac{100}{0.625(10^6 - f)} & 800 \text{ kHz} < f \leq 1 \text{ MHz} \end{cases}$$

Quanto al tempo di campionamento, esso non dipende dalla forma della densità spettrale di potenza $G(f)$, modificata dall'equalizzatore, quanto dalla massima frequenza del segnale, rimasta invariata. Perciò, il massimo tempo di campionamento è identico prima e dopo l'equalizzatore, e vale

$$T_s = \frac{1}{2B} = \frac{1}{2 \cdot 10^6} = 0.5 \mu\text{s}$$

Nel caso di una banda di guardia pari al 10% del segnale, si avrà (dopo l'equalizzatore) lo spettro in fig. 4.1.

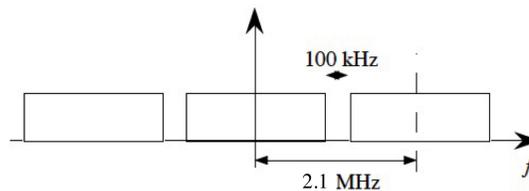


Figura 4.1 Rappresentazione grafica dello spettro dopo l'equalizzatore e con una banda di guardia.

Ricordando che la distanza tra le repliche (in frequenza) del segnale originale nello spettro del segnale campionato corrisponde all'inverso del tempo di campionamento T_s , in questo caso,

$$\frac{1}{T_s} = 2.1 \text{ MHz} \implies T_s = \frac{1}{2.1} \mu\text{s} = 0.476 \mu\text{s}$$

Se poi il segnale campionato viene quantizzato e trasmesso, la banda necessaria sarà

$$B = \frac{m}{T_b}$$

ove $m \geq 1$ e T_b è il tempo del singolo bit, pari a $\frac{T_s}{n_b}$, se n_b è il numero di bit necessari.

Per avere una precisione superiore allo 0.1 % ci vogliono almeno 9 bit. Infatti

$$\frac{1}{1000} \geq \frac{1}{2^{(n_b+1)}} \implies 1000 \leq 2^{(n_b+1)} \implies n_b \geq 9 \implies B = 9 \cdot \frac{m}{T_s}$$

Supponendo $m = 1$ e introducendo $T_s = 0.5 \mu s$ si avrà

$$B = \frac{9}{0.5} \text{ MHz} = 18 \text{ MHz}$$

Osservazione

In generale, nel caso di un segnale che abbia valori in un intervallo indicato come R e quantizzato uniformemente con N livelli, ognuno dei livelli rappresenta un intervallo di valori detto *quanto* e indicato normalmente con la lettera Δ .

Il massimo errore che si può fare nel rappresentare l'intervallo Δ con il suo valore centrale è quindi pari a $\Delta/2$:

$$\max(e) = \frac{\Delta}{2} = \frac{R}{2N}.$$

Nel caso in cui il numero degli intervalli sia scelto come una potenza di 2 per permettere di rappresentarli con una sequenza di simboli binari, $N = 2^{n_b}$ e dunque

$$\max(e) = \frac{\Delta}{2} = \frac{R}{2 \cdot 2^{n_b}}.$$

Se si vuole indicare, come richiesto dall'esercizio, il valore massimo *percentuale*, esso varrà dunque

$$\max(e\%) = \frac{\Delta}{2R} = \frac{1}{2^{n_b+1}}.$$

Soluzione del problema 4.3

Il tempo di campionamento massimo è pari all'inverso del doppio della banda del segnale e quindi a

$$T_s = \frac{1}{2B} = \frac{1}{2 \text{ kHz}} = 0.5 \text{ ms}$$

Per calcolare invece la funzione di trasferimento $H(f)$ basta osservare che il blocco restituisce (per definizione) un rettangolo lungo τ e alto 1 se in ingresso vi è un campione istantaneo alto 1, la cui rappresentazione in termini matematici è una δ di Dirac di altezza 1. Dato che la risposta di un blocco lineare alla δ unitaria è la sua risposta impulsiva $h(t)$, $H(f)$ può essere calcolata come la trasformata di Fourier di quest'ultima.

Perciò

$$h(t) = \text{rect}\left(\frac{t - 0.5\tau}{\tau}\right)$$

$$H(f) = \tau \text{sinc } \tau f e^{-j\frac{2\pi f\tau}{2}} = \tau \text{sinc } \tau f e^{-j\pi f\tau}$$

Per determinare lo spettro del segnale in uscita dalla catena in fig. 4.3, è sufficiente considerare lo spettro $\tilde{S}(f)$ del segnale campionato $\tilde{s}(t)$. Dopo il blocco di funzione di trasferimento $H(f)$ si avrà:

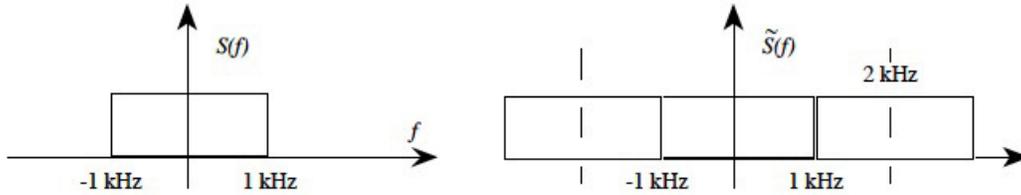


Figura 4.2 Spettro di $s(t)$ e del segnale campionato $\tilde{s}(t)$.

$$\tilde{S}(f)H(f) = \tilde{S}(f)\tau \text{sinc } \tau f e^{-j\pi\tau f}$$

e quindi

$$Y(f) = \begin{cases} \tilde{S}(f)H(f) & |f| \leq 1\text{kHz} \\ 0 & |f| > 1\text{kHz} \end{cases}$$

dopo il filtro passabasso. Il procedimento è illustrato nelle figure 4.2 e 4.3.

Dato quindi che $S(f) = 1$ per $|f| \leq 1\text{ kHz}$, si ha che:

$$\begin{aligned} \tilde{S}(f) &= \frac{1}{T_s} \sum_n S\left(f - \frac{n}{T_s}\right) \\ &= 2000 \sum_n S(f - 2n \cdot 10^3) \end{aligned}$$

il risultato è:

$$Y(f) = 2000 \tau \text{sinc } \tau f e^{-j\pi\tau f} \quad |f| \leq 1\text{kHz}$$

Come si nota, a parte il fattore di scala, lo spettro di $y(t)$ è distorto rispetto a quello di $s(t)$, ma la distorsione è decisamente lieve. La minore problematicità è

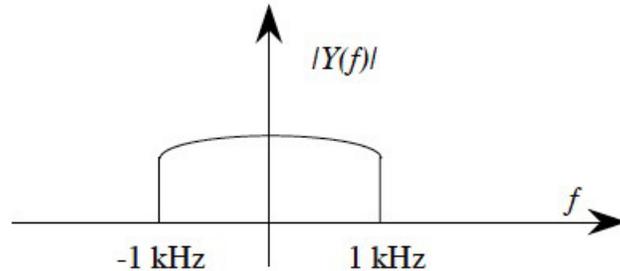


Figura 4.3 Modulo dello spettro del segnale in uscita.

dovuta alla posizione degli zeri della funzione sinc in frequenza, che a loro volta dipendono dal tempo di ripetizione della funzione rect nel tempo. Infatti, tali zeri si hanno per $\tau f \pi = n\pi$, cioè per $f = \frac{n}{\tau} = 10n$ kHz. Quindi, il primo zero è a 10 kHz, abbastanza distante dalla banda del segnale.

Osservazione

La metodologia riportata in questo esercizio corrisponde al cosiddetto campionamento *sample and hold*, in cui il campione istantaneo prelevato dal campionatore ideale è mantenuto per un periodo di tempo relativamente corto rispetto al tempo di campionamento. Questo tipo di campionamento approssima meglio il campionamento reale rispetto al campionamento *ideale* con i campioni rappresentati da δ di Dirac.

Soluzione del problema 4.4

Chiamato $y(t) = s(t) \cdot v(t)$, si hanno sei casi da considerare.

Inizialmente, sia

$$y(t) = s(t) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{i}{B}\right)$$

e quindi $y(t)$ è $s(t)$ campionata con tempo di campionamento $T_s = \frac{1}{B}$. Il segnale è dunque sottocampionato e si ha aliasing (fig. 4.4).

Si noti che in fig. 4.4 si indica con k il valore costante dello spettro di $s(t)$. Dunque, dopo il filtro passabasso si ottiene un segnale il cui spettro è come in fig. 4.5 e quindi, come ci si aspettava, in presenza di aliasing non si ottiene il segnale modulante.

Nel secondo caso (fig. 4.6)

$$y(t) = s(t) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{i}{2B}\right)$$

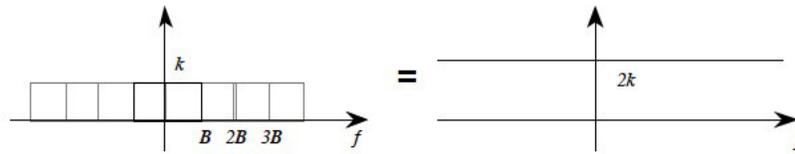


Figura 4.4 Lo spettro del primo caso indicato nel problema.

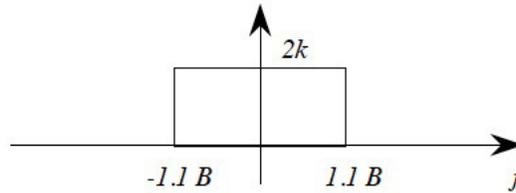


Figura 4.5 Lo spettro del segnale in uscita dal filtro passabasso nel primo caso indicato nel problema.

e quindi $y(t)$ è $s(t)$ campionata con tempo di campionamento $T_s = \frac{1}{2B}$ (frequenza di Nyquist).

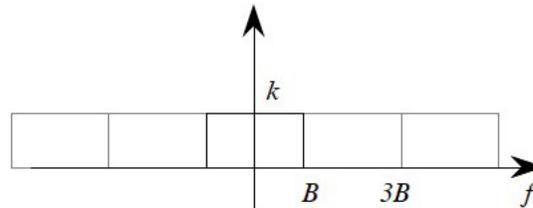


Figura 4.6 Lo spettro del secondo caso indicato nel problema.

In questo caso, dopo il filtro passabasso, lo spettro è quello in fig. 4.7. Si noti che, nonostante non ci sia aliasing, lo spettro in figura non è quello del segnale modulante, perché il filtro passabasso ha una banda maggiore di quella del segnale. Per recuperare il segnale abbiamo bisogno di una *banda di guardia* tra le copie dello spettro del segnale originale dovute al campionamento, quindi dobbiamo *sovracampionare*, cioè campionare ad una frequenza maggiore di quella di Nyquist.

Nel terzo caso (fig. 4.8)

$$y(t) = s(t) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{i}{4B}\right)$$

e quindi $y(t)$ è $s(t)$ campionata con tempo di campionamento $T_s = \frac{1}{4B}$. Il segnale è dunque sovracampionato

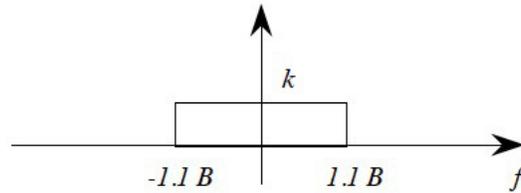


Figura 4.7 Lo spettro del segnale in uscita dal filtro passabasso nel secondo caso indicato nel problema.

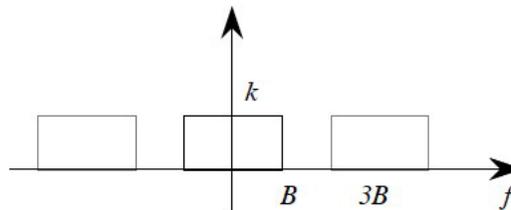


Figura 4.8 Lo spettro del terzo caso indicato nel problema.

Solo in questo caso, dopo il filtro passabasso lo spettro è uguale a quello del segnale modulante (vedi fig. 4.9).

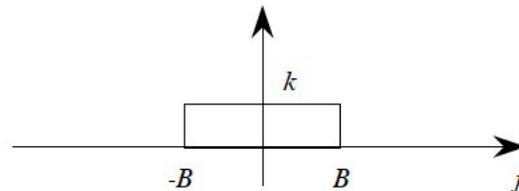


Figura 4.9 Lo spettro del segnale in uscita dal filtro passabasso nel terzo caso indicato nel problema.

Nel quarto caso

$$y(t) = s(t) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{t - i/2B}{1/B} \right)$$

ove $v(t)$ ha la forma (nel tempo) come in fig. 4.10 e dunque $y(t) = 2s(t)$. Alla fine, dopo il filtro lo spettro è visibile in fig. 4.11.

Nel quinto caso

$$y(t) = s(t) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{t - i/2B}{1/2B} \right)$$

e $v(t)$ ha la forma (nel tempo) come in fig. 4.12 e dunque $y(t) = s(t)$. Alla fine, dopo il filtro lo spettro è visibile in fig. 4.13.

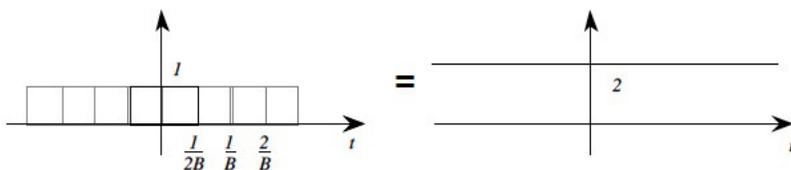


Figura 4.10 Il segnale $v(t)$ nel quarto caso indicato nel problema.

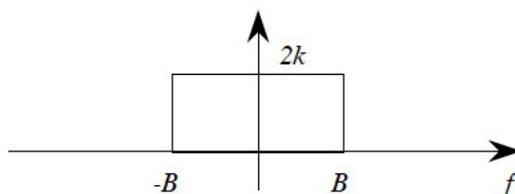


Figura 4.11 Lo spettro del segnale in uscita dal filtro passabasso nel quarto caso indicato nel problema.

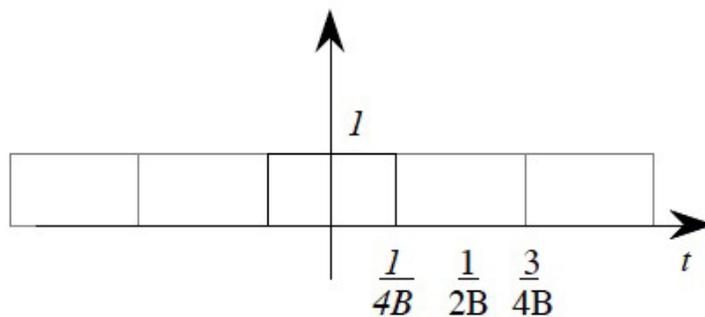


Figura 4.12 Il segnale $v(t)$ nel quinto caso indicato nel problema.

Nel sesto caso, infine

$$y(t) = s(t) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \text{rect} \left(\frac{t - i/2B}{1/4B} \right)$$

e $v(t)$ risulta come in fig. 4.14.

In questo caso, è necessario calcolare

$$Y(f) = S(f) * V(f)$$

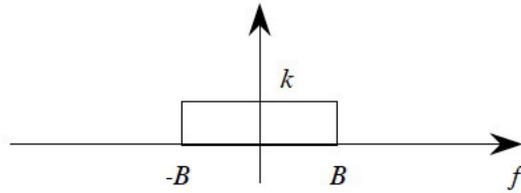


Figura 4.13 Lo spettro del segnale in uscita dal filtro passabasso nel quinto caso indicato nel problema.

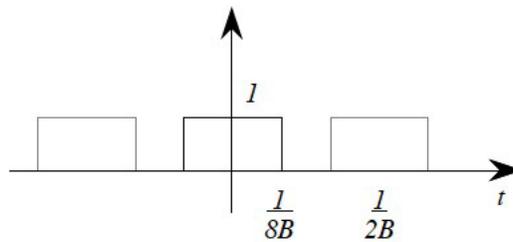


Figura 4.14 Il segnale $v(t)$ nel sesto caso indicato nel problema.

ove

$$V(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \delta(f - 2nB)$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) e^{j\frac{2\pi n t}{1/2B}} dt = \frac{1}{4B} 2B \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)$$

ottenendo l'andamento di fig. 4.15 e, dopo il filtro passabasso, uno spettro come in fig. 4.16.

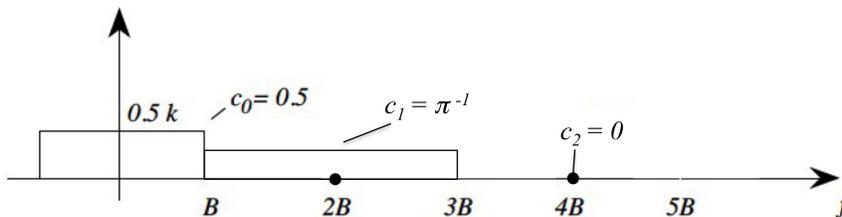


Figura 4.15 Lo spettro del sesto caso indicato nel problema.

Soluzione del problema 4.5

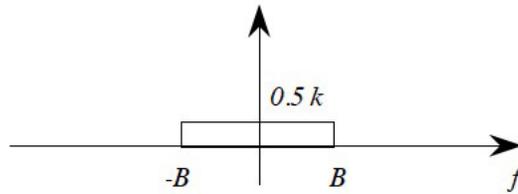
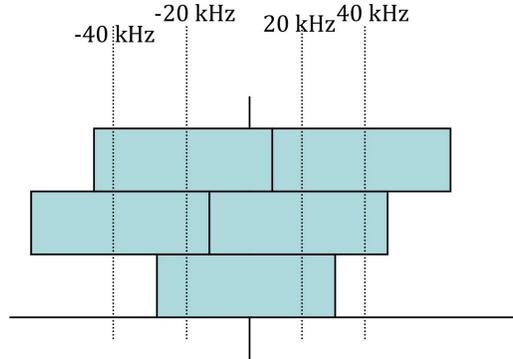


Figura 4.16 Lo spettro del segnale in uscita dal filtro passabasso nel sesto caso indicato nel problema.

Assumendo un campionamento ideale, lo spettro del segnale dopo il campionatore ($s_c(t)$) è la somma di tante copie dello spettro del segnale originale $s(t)$, ognuna centrata attorno alla frequenza di campionamento, che è 20 kHz.

$$S_c(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{T_s}\right)$$

Come conseguenza del sottocampionamento imposto dall'esercizio, si ha che il segnale campionato ha ancora uno spettro costante, ma pari a 3 volte il suo spettro originale (vedi figura).



Dopo il filtro passabasso, che ripristina il segnale, avremo quindi ancora uno spettro costante nella stessa banda del segnale originale, ma altro tre volte tanto. Il segnale in uscita è dunque 3 volte il segnale in ingresso, la cui espressione nel tempo (antitrasformando un rect si ottiene una sinc!) è

$$s(t) = 3 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \operatorname{sinc}(30000t) = \frac{9}{2} \operatorname{sinc}(30000t).$$

Trasmettendo poi il segnale con una modulazione AM-DSB, bisogna trovarne il minimo. Tale minimo andrebbe trovato in maniera numerica, ma può essere ragionevolmente approssimato con il primo minimo della funzione seno a denominatore della sinc, cioè quando l'argomento della sinc vale $3/2$.

Tale minimo vale $1/(3/2\pi) = -2\pi/3$. Nel nostro caso, dunque, il minimo della funzione è

$$\min_t s(t) = \frac{9}{2} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{3} = -3\pi.$$

Il valore massimo del coefficiente di modulazione k , detto k_{\max} , sarà dunque $1/(3\pi)$.

Infine, la potenza del segnale vale (integrando il quadrato del suo spettro, grazie al Teorema di Parseval):

$$P_m = (3 \cdot 5 \cdot 10^{-5})^2 \cdot 60000 = 90 \cdot 10^{-6},$$

e dunque γ vale

$$\gamma_{AM} = \frac{k_{\max}^2 P_m}{1 + k_{\max}^2 P_m} = \frac{(3\pi)^{-2} P_m}{1 + (3\pi)^{-2} P_m} = \frac{P_m}{9\pi^2 + P_m} \approx \frac{10^{-5}}{\pi^2}.$$

Soluzione del problema 4.6

Ogni segnale in uscita è costituito da campioni di $s(t)$ equispaziati nel tempo di $NT_s = N \cdot 25\mu s = T_c$. Perché da questi campioni sia possibile recuperare una copia indistorta di $s(t)$ bisogna che

$$T_c \leq \frac{1}{2B} \quad \text{ove } B = 4 \text{ kHz}$$

Perciò il valore massimo di T_c è $125\mu s$ e $N \leq 5$: al massimo, l'interruttore rotante potrà avere 5 posizioni e 5 uscite.

Se poi la potenza media di $s(t)$ è 1 W, dato che non si assume alcuna perdita nell'interruttore, ogni segnale in uscita ha potenza media pari a

$$P_{out} = \frac{P}{N} = 0.2 \text{ W}.$$

Soluzione del problema 4.7

Il numero di bit n è indipendente dalla dinamica del segnale, e dipende solo dalla precisione richiesta. In questo caso

$$0.5\% = \frac{1}{200} > \frac{1}{256} = \frac{1}{2^8} = \frac{1}{2^{(n+1)}} \implies n = 7$$

e di conseguenza $\Delta = \frac{2}{128} = \frac{1}{64}$.

Chiamando adesso $\hat{s}(t)$ il segnale quantizzato, l'errore che si compie ad ogni istante è $s(t) - \hat{s}(t)$. Perciò, l'errore medio tra $-\Delta/2$ e $\Delta/2$ è

$$\bar{e} = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} (s - \hat{s}) f(s) ds$$

ove si è lasciato perdere la dipendenza dal tempo per semplicità di notazione. Supponendo la funzione densità di probabilità $f(s)$ costante nell'intervallo tra $-\Delta/2$ e $\Delta/2$, si ottiene

$$\bar{e} = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} s f(s) ds$$

perché \hat{s} , se $s \in [-\Delta/2, \Delta/2]$ è pari a 0 (cioè lo 0 rappresenta tutti i valori in modulo $<$ di $\Delta/2$).

Quindi

$$\bar{e} = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} s \frac{1}{\Delta} ds = 0$$

Similmente, anche nel caso in cui la funzione densità di probabilità $f(s)$ sia di forma triangolare, si ottiene

$$\begin{aligned} \bar{e} &= \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} s f(s) ds \\ &= \int_0^{\Delta/2} s \left(-s + \frac{\Delta}{2}\right) \frac{4}{\Delta^2} ds + \int_{-\Delta/2}^0 s \left(s + \frac{\Delta}{2}\right) \frac{4}{\Delta^2} ds = 0 \end{aligned}$$

Infine, l'errore quadratico medio è definito come

$$\bar{e}_q = \sqrt{\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} (\hat{s} - s)^2 f(s) ds} = \sqrt{\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} s^2 f(s) ds}$$

Nel caso di funzione di probabilità costante:

$$\bar{e}_q = \sqrt{\int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} s^2 \frac{1}{\Delta} ds} = \sqrt{2 \left. \frac{s^3}{3} \right|_0^{\Delta/2}} = \sqrt{\frac{\Delta^2}{12}}$$

Nel caso di funzione densità di probabilità triangolare, invece:

$$\begin{aligned} \bar{e}_q &= \sqrt{\int_0^{\Delta/2} s^2 \left(\frac{\Delta}{2} - s\right) \frac{4}{\Delta^2} ds + \int_{-\Delta/2}^0 s^2 \left(\frac{\Delta}{2} + s\right) \frac{4}{\Delta^2} ds} \\ &= \sqrt{2 \left. \frac{s^3}{3} \right|_0^{\Delta/2} \frac{2}{\Delta} - 2 \left. \frac{s^4}{4} \right|_0^{\Delta/2}} = \sqrt{\frac{\Delta^2}{6} - \frac{\Delta^2}{8}} = \sqrt{\frac{\Delta^2}{24}} \end{aligned}$$

Soluzione del problema 4.8

Per campionare $x(t)$ con precisione dello 0.5% sono richiesti almeno 7 bit. Infatti, deve essere

$$\frac{1}{2^{(n+1)}} < \frac{1}{100} \implies n \geq 7$$

Con 7 bit l'errore di quantizzazione che si fa provoca una potenza di rumore pari a

$$P_N = \frac{\Delta^2}{12} \quad \text{ove } \Delta = \frac{4}{2^n} = \frac{4}{128} = \frac{1}{32}$$

La potenza del segnale è invece pari a $\overline{x^2}$. Dunque

$$\frac{S}{N} = \frac{\int x^2 f(x) dx}{\frac{\Delta^2}{12}}$$

Per la variabile X questo significa

$$f(x) = kx \quad 0 \leq x \leq 4 \implies \frac{k \cdot 4}{2} = 1 \implies k = \frac{1}{2}$$

e di conseguenza

$$\int_0^4 x^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^4 = 32$$

e perciò

$$\frac{S}{N} = 32 \cdot 12 \cdot 32^2 = 393216$$

Per la variabile X' , invece, si avrà

$$f(x') = k'(4 - x') \implies k' \frac{16}{2} = 1 \implies k' = \frac{1}{8}$$

e di conseguenza

$$\int_0^4 x'^2 \frac{1}{8} (4 - x') dx' = \frac{1}{2} \left. \frac{x'^3}{3} \right|_0^4 - \frac{1}{8} \left. \frac{x'^4}{4} \right|_0^4 = \frac{32}{3} - \frac{32}{4} = \frac{8}{3}$$

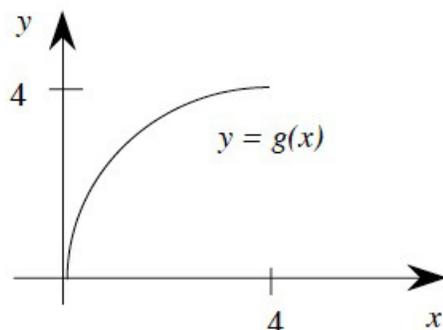
e perciò

$$\frac{S}{N} = \frac{8}{3} \cdot 12 \cdot 32^2 = 32768$$

Infine, per considerare l'ultimo caso, bisogna prima trovare i limiti di integrazione e la funzione densità di probabilità della variabile Y . Come si vede dalla figura seguente, la funzione $y = g(x)$ è invertibile per ogni $x \in [0, 4]$ e fornisce valori in $[0, 4]$ (fig. 4.17).

Di conseguenza

$$y = 2x' - \frac{x'^2}{4} \implies x = 4 \pm 2\sqrt{4 - y}$$


Figura 4.17

Delle due scelte di x , dalla figura si vede subito che quella giusta è quella con il segno meno. Perciò

$$\begin{aligned}
 x &= 4 - 2\sqrt{4-y} \\
 \left| \frac{dx}{dy} \right| &= \frac{1}{\sqrt{4-y}} \\
 f(y) &= f(x)|_{x=4-2\sqrt{4-y}} \left| \frac{dx}{dy} \right| \\
 &= \frac{1}{8}(4 - 4 + 2\sqrt{4-y}) \frac{1}{\sqrt{4-y}} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Di conseguenza

$$\frac{S}{N} = \frac{\int_0^4 y^2 f(y) dy}{\frac{\Delta^2}{12}}$$

e cioè

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 \frac{y^2}{4} dy &= \frac{1}{4} \frac{y^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \\
 \frac{S}{N} &= \frac{16}{3} \cdot 12 \cdot 32^2 = 65536
 \end{aligned}$$

Soluzione del problema 4.9

La potenza del singolo campione è $\frac{s^2(iT)}{T_s} \tau$.

Dunque

$$\begin{aligned} P_{media} &= \overline{s^2(iT)} \frac{\tau}{T_s} = \frac{\tau}{T_s} \int_0^A s^2(iT) f(s(iT)) ds(iT) \\ &= \frac{\tau}{T_s} \int_0^A s^2(iT) \frac{1}{A} ds(iT) = \frac{A^2}{3} \frac{\tau}{T_s} \end{aligned}$$

Per avere poi una modulazione PCM al 10% bastano 3 bit. Infatti

$$\frac{10}{100} = \frac{1}{10} \geq \frac{1}{2^{(n+1)}} \implies n \geq 3$$

Per calcolare l'energia media di un bit, tenendo conto che i bit uguali a 1 e quelli uguali a 0 sono equiprobabili, si fa solo la media tra l'energia del bit 1 e quella del bit 0. Più in particolare

$$\begin{aligned} E_1 &= \text{En. del bit 1} = B^2\delta \\ E_0 &= \text{En. del bit 0} = 0 \\ E_b &= \frac{E_1 + E_0}{2} = \frac{B^2\delta}{2} \end{aligned}$$

Per avere invece la potenza media del segnale PCM, si può procedere per "ispezione". Con 3 bit, infatti, ci sono 8 possibile codifiche, ognuna trasmessa con 3 bit in un tempo pari a T_s . Queste codifiche sono equiprobabili (perché la ampiezza di $s(t)$ ha densità di probabilità costante). Dunque la potenza media del segnale PCM è

$$P_{T_s} = (\overline{n_1}E_1 + \overline{n_0}E_0) \frac{1}{T_s}$$

ove $\overline{n_1}$ è il numero medio di bit uguali a 1 nelle 8 possibile codifiche, e $\overline{n_0}$ quello dei bit uguali a 0.

Allora

	n_1	n_0
000	0	3
001	1	2
010	1	2
011	2	1
100	1	2
101	2	1
110	2	1
111	3	0

e dunque $\overline{n_1} = \overline{n_0} = \frac{12}{8} = 1.5$.

Sostituendo

$$P_{T_s} = (1.5 \cdot B^2\delta + 1.5 \cdot 0) \frac{1}{T_s} = 3 \frac{B^2\delta}{2T_s}$$

Si noti che si sarebbe potuto giungere alla stessa conclusione calcolando la potenza del segnale PCM come il rapporto tra l'energia media di una parola di 3 bit e il tempo in cui essa viene trasmessa:

$$P_{T_s} = \frac{3E_b}{T_s} = 3 \frac{B^2 \delta}{2T_s}.$$

Come ultima considerazione, si noti che la media è lineare in δ , cioè aumenta in maniera direttamente proporzionale alla lunghezza degli impulsi.

Soluzione del problema 4.10

Dato che il segnale viaggia a 1 Gb/s, il tempo di bit $T_b = 10^{-9}$ s.

La trasmissione è fatta in byte, quindi la parola usata per trasmettere un campione del segnale originale è fatta di 8 bit. Possiamo assumere quindi che il tempo di campionamento sia pari a $T_s = 8T_b = 8$ ns.

Sfruttando poi il fatto che la banda del segnale, nel caso in cui il campionamento sia stato fatto correttamente, deve essere almeno pari all'inverso di due volte il tempo di campionamento, si deduce che la banda $B \leq \frac{1}{16}$ GHz = 62.5 MHz.

Infine, sapendo che la potenza del rumore di quantizzazione vale $\frac{\Delta^2}{12}$, dove $\Delta = \frac{R}{2^{n_b}}$, se ne ricava che:

$$P_{e_q} = \left(\frac{5}{2^8}\right)^2 \frac{1}{12} = 3.18 \cdot 10^{-5}.$$

Soluzione del problema 4.11

Il segnale presentato nel problema può essere scomposto nella somma di due triangoli, come mostrato in figura 4.18.

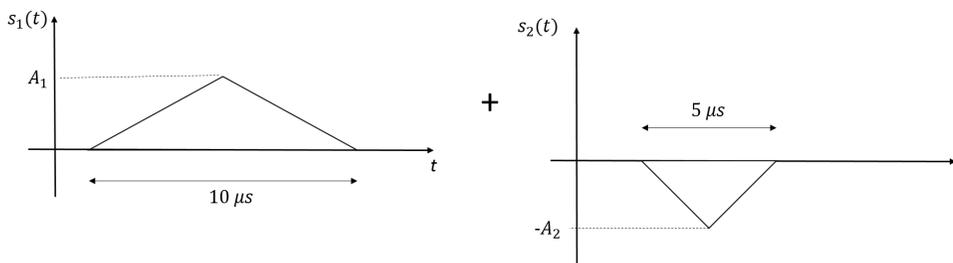


Figura 4.18 La scomposizione del segnale presentato nel problema.

Per definire la larghezza di banda di $s(t)$ non serve calcolare espressamente i valori delle ampiezze A_1 e A_2 .

Essendo lo spettro di $s(t)$ dato da $S(f) = S_1(f) + S_2(f)$, la larghezza di banda del segnale sarà determinata dal segnale componente avente larghezza di banda massima.

In questo caso il segnale di banda più larga sarà $s_2(t)$ essendo il triangolo di durata temporale inferiore.

Lo spettro di $s_2(t)$ è dato da:

$$S_2(f) = \frac{-A_2 5 \cdot 10^{-6}}{2} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{f 5 \cdot 10^{-6}}{2} \right)$$

Come criterio per definire la banda è possibile scegliere la larghezza del lobo principale della funzione sinc^2 . A questo proposito è sufficiente calcolare la frequenza relativa al primo zero dello spettro:

$$\frac{f_1 5 \cdot 10^{-6}}{2} = 1 \Rightarrow f_1 = \frac{2}{5} \cdot 10^6 = 0.4 \cdot 10^6 = 400 \text{ kHz}$$

Assumendo poi una precisione dello 0.5% per la quantizzazione:

$$\frac{1}{2N} = \frac{0.5}{100} \Rightarrow N = \frac{1000}{2 \cdot 5} = 100$$

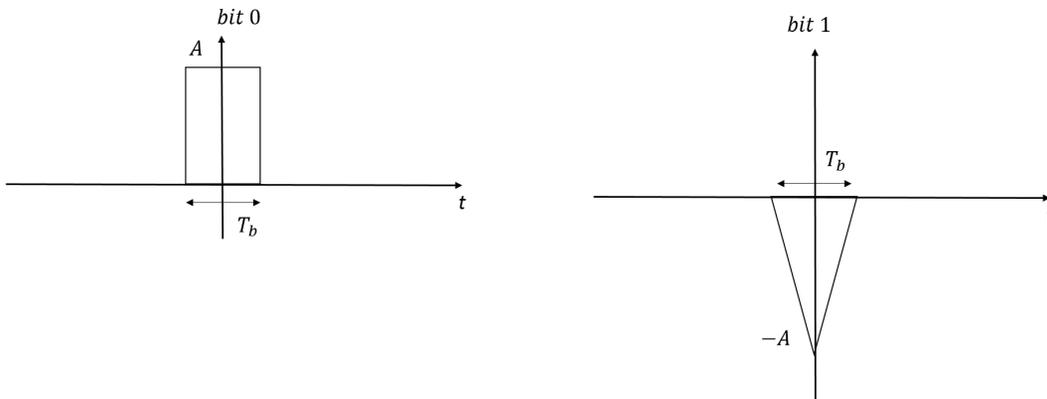


Figura 4.19 Rappresentazione grafica dei segnali usati per trasmettere il bit 0 (a sinistra) e il bit 1 (a destra).

il numero di bit necessari risulta essere:

$$n_b = \lceil \log_2(100) \rceil = 7$$

Inoltre, l'energia media per bit è data da:

$$\overline{E}_b = P(0)E_0 + P(1)E_1 = \frac{1}{2}E_0 + \frac{1}{2}E_1$$

dove $P(0) = P(1) = \frac{1}{2}$ sono le probabilità di trasmettere i rispettivi livelli dei bit.

L'energia dei due segnali è l'integrale dei segnali elevati al quadrato e dunque:

$$E_0 = A^2 T_b$$

$$E_1 = 2 \int_0^{\frac{T_b}{2}} \left(\frac{Ax}{\frac{T_b}{2}} \right)^2 dx = \frac{8A^2}{T_b^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{T_b/2} = \frac{A^2 T_b}{3}$$

$$\overline{E_b} = \frac{A^2 T_b}{2} + \frac{A^2 T_b}{6} = \frac{2A^2 T_b}{3}$$

Infine, la potenza media è data da:

$$\overline{P} = \frac{\overline{E_b}}{T_b} = \frac{2}{3} A^2$$

Se tale potenza deve valere 1 W, si ottiene poi che

$$A = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

5

Problemi sulle modulazioni digitali

Problema	Argomento	Difficoltà
5.1	BER per BPSK	*
5.2	Segnale binario e probabilità d'errore	***
5.3	BER per M-PSK	*
5.4	Filtro adattato per FSK	**
5.5	Filtro non adattato	***
5.6	Ricevitore a campionamento	*
5.7	Ricevitore a campionamento	**
5.8	Spettro di un segnale digitale "con memoria"	**

Problema 5.1

Si consideri un segnale vocale, con banda 4kHz, campionato e quantizzato con una precisione non inferiore allo 0.1%. Il segnale PCM viene moltiplicato per una portante a 50 MHz.

Determinare:

- la banda del segnale così ottenuto;
- la potenza di rumore di quantizzazione del segnale;
- la probabilità di errore supponendo che il segnale originale abbia dinamica pari a 1, che il segnale PCM venga trasmesso mediante impulsi positivi e negativi (bit 1 e 0 rispettivamente) alti 5 mV, immersi in un rumore AWGN con densità spettrale di potenza pari a 10^{-14} W/Hz.

Problema 5.2

Si dimostri che un segnale binario immerso nel rumore AWGN e ricevuto con un ricevitore ottimo presenta una probabilità d'errore più alta nel caso in cui

$$\begin{aligned}s_1(t) &= \text{rect}\left(\frac{t}{T_b}\right) \\ s_2(t) &= 0,\end{aligned}$$

rispetto al caso

$$\begin{aligned}s_1(t) &= \text{rect}\left(\frac{t}{T_b}\right) \\ s_2(t) &= -\text{rect}\left(\frac{t}{T_b}\right).\end{aligned}$$

Calcolare inoltre la probabilità di errore più bassa (cioè quella del secondo caso) assumendo che il segnale di partenza abbia banda di 5 kHz, sia stato sovracampionato di un fattore cinque e quantizzato con una potenza di rumore di quantizzazione pari a $2.72848 \cdot 10^{-12}$ W, e infine la densità spettrale di potenza di rumore sia pari a $3 \cdot 10^{-7}$ W/Hz.

Problema 5.3

Sia dato un segnale digitale, in cui 8 simboli vengono trasmessi ognuno mediante un segnale analogico del tipo

$$v(t) = \cos(\omega t + \phi) \quad \phi = (i - 1) \pi/4 \quad i = 1, \dots, 8$$

A questo segnale si somma un rumore di fase $\theta(t)$, facendo in modo che quanto viene ricevuto sia $v(t) = \cos(\omega t + \phi + \theta(t))$.

Calcolare la probabilità di errore (cioè la probabilità che un simbolo venga riconosciuto come un altro simbolo) nei casi:

1. θ con funzione di probabilità costante in $[-\pi/4, \pi/4]$;
2. θ con funzione di probabilità Gaussiana con media nulla e $\sigma = \pi/4$.

Problema 5.4

Partendo dalla formula della funzione di trasferimento del filtro adattato, calcolare la risposta impulsiva di tale filtro nel caso in cui i due simboli trasmessi siano rappresentati dai segnali:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= \cos(2\pi(f_0 + \Delta f)t) \\ s_2(t) &= \cos(2\pi(f_0 - \Delta f)t) \end{aligned}$$

dove $\Delta f = \frac{f_0}{M}$ e $T_b = \frac{n}{f_0}$, $\frac{n}{M} = \frac{253}{2}$.

Problema 5.5

Si supponga di avere un segnale digitale binario, in cui il segnale 0 è rappresentato da un impulso lungo il tempo di bit e alto 1, mentre il simbolo 1 da un impulso con la stessa durata, ma alto $(1+\Delta)$. Il segnale è stato ottenuto campionando un segnale analogico con 10 kHz di banda, quantizzato con una precisione migliore dello 0.1%.

- Si calcoli l'espressione della probabilità d'errore per un filtro in ricezione adattato a questo segnale più un rumore AWGN con densità spettrale di potenza pari a $2.5 \cdot 10^{-5}$ W/Hz (sarà una funzione di Δ).
- Si estragga poi qual è il valore di Δ per ottenere un errore pari a 10^{-5} .
- Con questo valore, supponendo che il secondo simbolo duri adesso $2/3$ del tempo di bit, si ricalcoli la probabilità di errore.
- Ponendo infine $\Delta = 0$ e supponendo che i due segnali abbiano durata diversa, il primo pari al tempo di bit e il secondo pari al tempo di bit $\Delta\tau$, si definisca il valore di $\Delta\tau$ che permette di avere una probabilità di errore pari a 10^{-4} .

Problema 5.6

Si supponga di avere un sistema di trasmissione binario ad impulsi, nel quale al valore binario 0 corrisponde un impulso di altezza $\frac{\pi}{2}$, ed al valore binario 1

corrisponde un impulso di altezza $-\frac{\pi}{2}$. I due simboli vengono emessi con uguali probabilità. Alla ricezione, il tipo di impulso emesso (0 o 1) è riconosciuto confrontando l'altezza dell'impulso ricevuto con una soglia s .

Sul canale del sistema di trasmissione, al segnale utile si somma un rumore caratterizzabile come una variabile casuale X con funzione densità di probabilità $f_X(x) = k(1 + \cos(x))$ per $|x| \leq \pi$. Dopo aver definito quale sia il valore di s che fornisce la probabilità di errore minore, si calcoli qual è la probabilità di riconoscere erroneamente un bit.

Cosa cambierebbe se i due simboli non fossero equiprobabili?

Problema 5.7

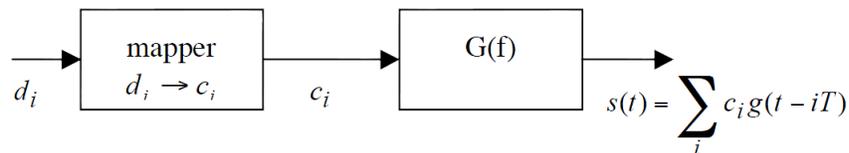
Si supponga di avere un sistema di trasmissione con quattro simboli s_1, s_2, s_3 and s_4 , codificati in binario, in modo che al valore 0 corrisponda un rettangolo di altezza 1 e durata T_b e al valore 1 corrisponde un impulso di altezza -2. I quattro simboli vengono emessi con probabilità 0.3, 0.1, 0.2 e 0.4, rispettivamente.

In ricezione, in assenza di rumore, il tipo di impulso emesso (0 o 1) è riconosciuto confrontando l'altezza di un campione del segnale ricevuto con una soglia V_T . Esiste un valore ottimale di questa soglia?

Sul canale del sistema di trasmissione, al segnale utile si somma un rumore AWGN a media nulla e con varianza σ_n^2 . qual è la probabilità di sbagliare in ricezione e non riconoscere il simbolo s_1 ? qual è la probabilità di sbagliare un qualunque simbolo?

Problema 5.8

Calcolare la densità spettrale di potenza, l'energia media per simbolo e la potenza media del segnale a radio frequenza ottenuto a partire dal segnale digitale in uscita dallo schema seguente



dove T è il tempo di simbolo e i simboli d_i appartengono all'alfabeto $D = \{1, 0\}$ di simboli indipendenti ed equiprobabili. Si assuma che, in uscita al blocco "mapper" si abbia una nuova costellazione ottenuta a partire dalla relazione

$$c_i = d_i + 2d_{i-1}$$

e che la risposta in frequenza del filtro $g(t)$ è di tipo a radice di coseno rialzato.

5.1 Soluzione dei problemi

Soluzione del problema 5.1

Secondo il teorema di Nyquist, il massimo valore del tempo di campionamento T_s per un segnale è l'inverso del doppio della sua banda, cioè in questo caso $1/8000=125 \mu s$.

Per una codifica migliore dello 0.1%, il massimo errore di quantizzazione deve essere più piccolo o al massimo uguale ad un millesimo della dinamica del segnale.

Quindi, supponendo di quantizzare in maniera uniforme su intervalli di lunghezza Δ , il massimo errore che si farà è $\Delta/2$ e la condizione si traduce in

$$\frac{\Delta}{2} \leq \frac{0.1}{100} R,$$

dove R è la dinamica (*range*) del segnale.

Supponendo che il numero di intervalli sia una potenza di 2, in modo che ogni intervallo possa essere rappresentato da un numero di bit chiamato n_b , si avrà quindi che

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{2} = \frac{1}{2} \frac{R}{2^{n_b}} &\leq \frac{0.1}{100} R \\ 2^{n_b+1} &\geq 1000 \end{aligned}$$

da cui si deduce, tenendo conto che n_b deve essere intero, che servono 9 bit.

Di conseguenza, il segnale digitale che rappresenta il segnale vocale campionato e quantizzato verrà trasmesso con un tempo di bit

$$T_b = \frac{T_s}{n_b}$$

e necessiterà di una banda di trasmissione approssimativamente pari a $1/T_b = 2n_b B$.

Lo stesso segnale, se spostato attorno alla portante a 50 MHz, occuperà una banda doppia, pari a

$$4n_b B = 4 \cdot 9 \cdot 4 = 72 \text{ kHz}.$$

Per quanto riguarda il rumore di quantizzazione, dalla teoria sappiamo che, nel caso in cui si possa assumere che tale errore sia uniformemente distribuito sull'intervallo $[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$, la sua potenza equivale a $\frac{\Delta^2}{12}$. Dato che la dinamica del segnale è pari ad 1, la potenza di quantizzazione vale

$$\frac{\Delta^2}{12} = \left(\frac{R}{2^{n_b}}\right)^2 \frac{1}{12} = \left(\frac{1}{2^9}\right)^2 \frac{1}{12} = 3.17 \cdot 10^{-7}.$$

Nel caso in cui il segnale sia immerso in rumore AWGN, la probabilità di errore di un segnale binario PCM vale

$$P(e) = \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0/2}} \right) = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$$

dove E_b è l'energia media del bit e $N_0/2$ la densità spettrale di potenza del rumore AWGN. Nel nostro caso

$$E_b = \int_0^{T_b} (\pm V)^2 dt = V^2 T_b = (5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot \frac{125}{9} \cdot 10^{-6} = 347 \cdot 10^{-12}$$

$$\frac{N_0}{2} = 10^{-14}$$

e avremo dunque

$$\left. \frac{E_b}{\eta} \right|_{dB} \approx 45.4$$

Essendo questo valore molto grande, è lecito porre $P(e) \approx 0$.

Soluzione del problema 5.2

La formula generale per la probabilità di errore di un ricevitore adattato con in ingresso un segnale binario rappresentato dai simboli $s_1(t)$ e $s_2(t)$ immerso in rumore AWGN vale

$$P(e) = \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \left(\sqrt{\frac{\overline{E_b}}{\eta}} \right)$$

dove $\overline{E_b}$ è il valor medio dell'energia del bit, cioè

$$\overline{E_b} = \frac{1}{2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} s_1^2(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} s_2^2(t) dt \right),$$

dove si è assunto che i due simboli siano equiprobabili (dato non definito dal problema).

Nel primo dei due casi indicati nell'esercizio

$$\overline{E_b} = \frac{1}{2} \left(\int_0^{T_b} \operatorname{rect}^2 \left(\frac{t}{T_b} \right) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} 0 dt \right) = \frac{T_b}{2},$$

mentre nel secondo caso

$$\overline{E_b} = \frac{1}{2} \left(\int_0^{T_b} \operatorname{rect}^2 \left(\frac{t}{T_b} \right) dt + \int_0^{T_b} \operatorname{rect}^2 \left(\frac{t}{T_b} \right) dt \right) = T_b.$$

Quindi, ricordando che il valore della funzione Erfc decresce all'aumentare del suo argomento, il secondo caso è più vantaggioso e porta ad una probabilità di errore più bassa.

Per calcolare la probabilità di errore nel caso indicato, bisogna prima di tutto trovare il tempo di bit T_b .

Il tempo di campionamento T_c è pari all'inverso del doppio della banda del segnale, quindi 1/10 kHz, cioè 0.1 ms. Dire che il segnale è sovracampionato di 5 volte significa che stiamo campionando ad una velocità 5 volte superiore, dunque con un tempo di campionamento 5 volte più piccolo, pari a 0.02 ms.

Il numero di bit usati per quantizzare il segnale si ottiene invece dalla formula della potenza del rumore di quantizzazione, $N_q = \frac{\Delta^2}{12}$.

Imponendo $\Delta = \frac{R}{2^{n_b}}$, con R pari alla dinamica del segnale e invertendo la formula per n_b , si ricava

$$n_b = \log_2 \left(\frac{1}{\sqrt{12N_q}} \right),$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $R = 1$ per il nostro problema e il logaritmo va inteso come approssimato al valore intero superiore.

Svolgendo i calcoli, $n_b = 17$, e quindi $T_b = 0.001176471$ s.

Usando a questo punto la formula per la probabilità di errore nel caso di segnali binari rappresentati da segnali identici ma con segno opposto (*antipodali*) che abbiamo visto precedentemente, si ottiene

$$P(e) = \frac{1}{2} \text{Erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{\eta}} \right) = \frac{1}{2} \text{Erfc} \left(\sqrt{\frac{T_b}{\eta}} \right) = \frac{1}{2} \text{Erfc} \left(\sqrt{\frac{0.001176471}{6 \cdot 10^{-7}}} \right).$$

Soluzione del problema 5.3

Per meglio comprendere l'esercizio, si ricordi che gli otto simboli si rappresentano nello spazio dei numeri complessi nel modo rappresentato in fig. 5.1.

Se al segnale originale viene aggiunto il rumore, il nuovo segnale ha fase istantanea pari a $\psi_i(t) = \phi_i + \theta(t)$. Si commette un errore quando

$$|\psi_i(t) - \phi_i| > \frac{\pi}{8}$$

come ad esempio nella fig. 5.2 per ϕ_2

Dunque, chiamando $f(\theta)$ la densità di probabilità di θ , la probabilità di errore del simbolo ϕ_i ($P_e(\phi_i)$) è

$$P_e(\phi_i) = 1 - \int_{\phi_i - \frac{\pi}{8}}^{\phi_i + \frac{\pi}{8}} f(\psi) d\psi = 1 - \int_{-\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{8}} f(\theta) d\theta$$

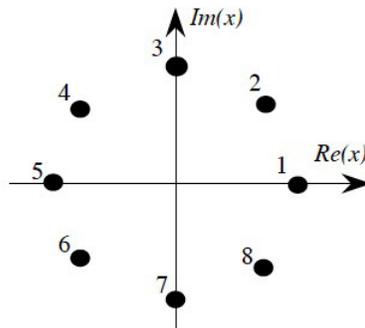


Figura 5.1 La costellazione di 8 simboli introdotta nel problema.

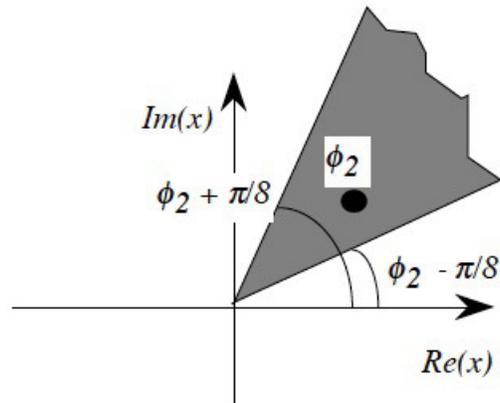


Figura 5.2 La regione di decisione per il secondo simbolo.

Nei due casi avremo dunque:

$$P_e(\phi_i) = 1 - \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{2}{\pi} d\theta = 1 - \frac{2}{\pi} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

oppure

$$P_e(\phi_i) = 1 - \int_{-\pi/8}^{\pi/8} \frac{1}{\sqrt{8\pi^3}} e^{-\frac{2\theta^2}{\pi^2}} d\theta$$

Osservazione

Si ricorda che l'ultimo integrale può essere risolto solo numericamente o con l'aiuto dei dati (tabulati) della cosiddetta *Funzione Errore Complementare* (*Complementary Error Function* o più brevemente *Erfc* in inglese).

Soluzione del problema 5.4

La funzione di trasferimento del filtro adattato (cioè il filtro ottimo in presenza di rumore AWGN), a meno di una costante, è uguale a

$$H(f) = P^*(f)e^{-j2\pi fT_b}$$

dove $p(t)$ è la differenza tra i due simboli binari trasmessi e T_b il tempo di bit. Applicando la trasformata inversa di Fourier, la risposta impulsiva di detto filtro sarà

$$h(t) = p(T_b - t) = s_1(T_b - t) - s_2(T_b - t)$$

Inserendo il valore di $s_1(t)$ e $s_2(t)$ nella formula si ottiene

$$\begin{aligned} h(t) &= A \{ \cos [2\pi (f_0 + \Delta f) (T_b - t)] - \cos [2\pi (f_0 - \Delta f) (T_b - t)] \} \\ &= A \left\{ \cos \left[2\pi \left(f_0 + \frac{f_0}{M} \right) \left(\frac{n}{f_0} - t \right) \right] - \cos \left[2\pi \left(f_0 - \frac{f_0}{M} \right) \left(\frac{n}{f_0} - t \right) \right] \right\} \\ &= A \left\{ \cos \left[2\pi \left(n + \frac{n}{M} \right) - 2\pi(f_0 + \Delta f)t \right] - \cos \left[2\pi \left(n - \frac{n}{M} \right) - 2\pi(f_0 - \Delta f)t \right] \right\} \\ &= A \left\{ \cos \left[2\pi \left(n + \frac{253}{2} \right) - 2\pi(f_0 + \Delta f)t \right] - \cos \left[2\pi \left(n - \frac{253}{2} \right) - 2\pi(f_0 - \Delta f)t \right] \right\} \\ &= A \{ \cos [2\pi n + 253\pi - 2\pi(f_0 + \Delta f)t] - \cos [2\pi n - 253\pi - 2\pi(f_0 - \Delta f)t] \} \\ &= A \{ \cos [\pi - 2\pi(f_0 + \Delta f)t] - \cos [-\pi - 2\pi(f_0 - \Delta f)t] \} \\ &= A \{ -\cos [2\pi(f_0 + \Delta f)t] + \cos [2\pi(f_0 - \Delta f)t] \} \\ &= -p(t) \end{aligned}$$

Osservazione

Il segnale binario trasmesso in questo caso è un segnale in cui l'informazione è portata dalla frequenza del coseno. Si tratta dunque della modulazione digitale chiamata FSK (*Frequency Shift Keying*), e più precisamente della 2-FSK perché la costellazione di simboli è binaria.

Soluzione del problema 5.5

Ricordando la formula nota per la probabilità di errore di un filtro adattato ad un segnale binario trasmesso mediante i due simboli $s_1(t)$ e $s_2(t)$:

$$P(e) = \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \left(\sqrt{\frac{p_0^2(T_b)}{\sigma_0^2}} \right)$$

dove $p_0(t) = p(t) * h(t)$, $h(t)$ è la risposta impulsiva del filtro adattato e $p(t) = s_1(t) - s_2(t)$.

Nel caso di rumore AWGN e simboli rappresentati da rettangoli della stessa durata, il filtro ottimo corrisponde ad un integratore, e quindi

$$\frac{p_0^2(T_b)}{\sigma_0^2} = \frac{2}{\eta} \int_0^{T_b} (s_1(t) - s_2(t))^2 dt = \frac{2}{\eta} \int_0^{T_b} (1 - 1 - \Delta)^2 dt = \frac{2}{\eta} \Delta^2 T_b$$

Come si nota, la probabilità di errore è una funzione di Δ^2 .

Perciò, volendo avere una probabilità d'errore di 10^{-5} , bisogna utilizzare il grafico in fig. 5.3, che rappresenta la formula

$$P(e) = \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right).$$

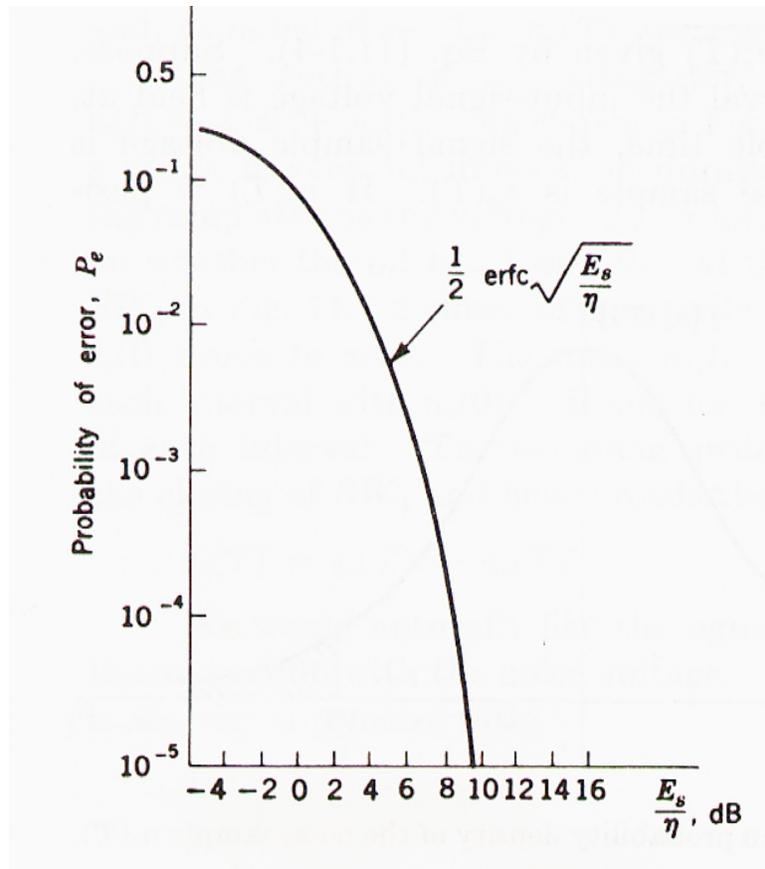


Figura 5.3

Da questo grafico si deduce che $P(e) = 10^{-5}$ quando $\left. \frac{E_b}{N_0} \right|_{dB} = 9.5$. Nel nostro caso, invece di $\frac{E_b}{N_0}$ abbiamo $\frac{p_0^2(T_b)}{\sigma_0^2}$ e quindi la condizione si traduce in

$$\left. \frac{p_0^2(T_b)}{\sigma_0^2} \right|_{dB} = 9.5 \implies \frac{2}{\eta} \Delta^2 T_b = 8.9$$

Sapendo che $T_b = T_c/n_b$, dove T_c è il tempo di campionamento del segnale analogico iniziale e n_b il numero di bit richiesto per realizzare la quantizzazione richiesta dall'esercizio, si può calcolare che $T_c = 1/2000$ s. Inoltre, $\frac{1}{2^{n_b-1}} \leq \frac{1}{1000}$ e dunque $n_b = 9$. In totale quindi $T_b \approx 5 \cdot 10^{-6}$ s e quindi $\Delta \approx 4.72$.

Osservazione

Secondo quanto riportato nella teoria, il filtro adattato ha una risposta impulsiva pari a $p(T_b - t)$. Nel caso che i simboli siano rettangoli di altezza A e B e di durata T_b :

$$\begin{aligned} h(t) = p(T_b - t) &= (A - B) \operatorname{rect}\left(\frac{T_b - t - T_b/2}{T_b}\right) \\ &= (A - B) \operatorname{rect}\left(\frac{T_b/2 - t}{T_b}\right) \\ &= (A - B) \operatorname{rect}\left(\frac{t - T_b/2}{T_b}\right), \end{aligned}$$

dato che $\operatorname{rect}(x) = \operatorname{rect}(-x)$.

La funzione di trasferimento di questo filtro sarà dunque

$$(A - B)T_b \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{T_b}\right) e^{-j\pi f T_b} = (A - B)T_b \frac{1}{j2\pi f} (1 - e^{-j2\pi f T_b})$$

che corrisponde alla trasformata di un integrale $\left(\frac{1}{j2\pi f}\right)$ meno quella di un integrale traslato di T_b . Quindi, il filtro adattato corrisponde ad un integratore tra 0 e T_b .

Se adesso il secondo impulso ha durata ridotta e si assume, come indicato dal problema, che il **filtro** - adattato al segnale di prima - **non cambi**, si avrà

$$\frac{p_0^2(T_b)}{\sigma_0^2} = \frac{2}{\eta} \left(\int_0^{2/3 T_b} (\Delta)^2 dt + \int_{2/3 T_b}^{T_b} (1)^2 dt \right) = \frac{2}{\eta} \left(\frac{2}{3} \Delta^2 T_b + \frac{T_b}{3} \right).$$

Inserendo i dati nella formula, si ha che tale valore nel nostro caso è 6 e dunque (sempre usando il grafico in fig. 5.3) $P(e) \approx 8 \cdot 10^{-4}$.

Osservazione

Si noti che il risultato non corrisponde alla probabilità di errore minima per il caso dei due impulsi di diversa durata, perché in questo caso il filtro non è quello adattato ai nuovi segnali trasmessi.

Infine, nel caso dei due segnali di lunghezza diversa, sempre con l'assunzione che il filtro in ricezione non cambi, si ottiene

$$\frac{p_0^2(T_b)}{\sigma_0^2} = \frac{2}{\eta} \int_{T_b-\tau}^{T_b} (1)^2 dt = \frac{2}{\eta} \tau.$$

Visto che (si veda nuovamente la fig. 5.3) $P(e) = 10^{-4}$ quando l'argomento è all'incirca pari a 8 dB, si ricava che $\tau = 2.5 \cdot 10^{-5}$ s.

Soluzione del problema 5.6

Nel caso di due simboli, indicati come 0 e 1, la probabilità di errore si calcola come

$$P(e) = p(0) p(e|0) + p(1) p(e|1)$$

dove $p(0)$ è la probabilità di trasmettere uno 0, e $p(e|0)$ è la probabilità condizionata di fare un errore in ricezione **avendo trasmesso** uno 0.

Nel caso proposto dall'esercizio:

$$p(e|0) = p\left(\frac{\pi}{2} + X < s\right) = p\left(X < s - \frac{\pi}{2}\right)$$

Sfruttando le informazioni fornite dall'esercizio

$$\begin{aligned} p\left(X < s - \frac{\pi}{2}\right) &= \int_{-\pi}^{s - \frac{\pi}{2}} k(1 + \cos(x)) dx \\ &= k \left[s - \frac{\pi}{2} + \pi - \sin\left(s - \frac{\pi}{2}\right) \right] \\ &= k \left[s + \frac{\pi}{2} - \sin\left(s - \frac{\pi}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

dove k si ottiene imponendo che la funzione densità di probabilità abbia integrale unitario:

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} k(1 + \cos(x)) dx = k(2\pi - 0) \implies k = \frac{1}{2\pi}.$$

Quindi:

$$\begin{aligned} p(e|0) &= \frac{s}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(s - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{s}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\cos(s)}{2\pi} \end{aligned}$$

Similmente:

$$\begin{aligned} p(e|1) &= p\left(-\frac{\pi}{2} + X > s\right) = p\left(X > s + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \int_{s+\frac{\pi}{2}}^{\pi} k(1 + \cos(x)) dx \\ &= k\left[\pi - s - \frac{\pi}{2} + \sin\left(s + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= k\left[-s + \frac{\pi}{2} + \sin\left(s + \frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= \frac{-s}{2\pi} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \sin\left(s + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{s}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\cos(s)}{2\pi} \end{aligned}$$

Inserendo questo risultati nell'espressione di $p(e)$ e ricordando che i simboli sono equiprobabili:

$$\begin{aligned} P(e) &= p(0) p(e|0) + p(1) p(e|1) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{s}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\cos(s)}{2\pi} \right] + \frac{1}{2} \left[-\frac{s}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\cos(s)}{2\pi} \right] \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\cos(s)}{2\pi} \end{aligned}$$

Il valore minimo di $P(e)$ definisce la soglia ottimale, che quindi si ha (come ci si poteva aspettare) per $s = 0$. In queste condizioni,

$$P(e) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} = \frac{\pi - 2}{4\pi}$$

Nel caso di probabilità dei simboli diverse, la formula della probabilità di errore in funzione della soglia diviene

$$\begin{aligned} P(e) &= p(0) p(e|0) + (1 - p(0)) p(e|1) = p(e|1) + p(0) (p(e|0) - p(e|1)) \\ &= -\frac{s}{2\pi} + \frac{1}{4} - \frac{\cos(s)}{2\pi} + p(0) \frac{s}{\pi} \end{aligned}$$

Come si nota, il valore di s che minimizza questa funzione errore è quello che minimizza la funzione

$$f(s) = \frac{1}{2\pi} [(2p(0) - 1)s - \cos(s)]$$

da cui $s = \arcsin(1 - 2p(0))$.

Osservazione

Si noti che l'ultima espressione si riduce a $s = \arcsin(0) = 0$ nel caso in cui $p(0) = 0.5$, che è il caso del problema.

Soluzione del problema 5.7

Dato che i simboli sono 4, ad ognuno di essi corrisponderà una coppia di simboli binari, ad esempio

$$\begin{aligned}s_1 &= 00 \\s_2 &= 01 \\s_3 &= 10 \\s_4 &= 11\end{aligned}$$

In totale, quindi, tenendo conto delle probabilità di trasmissione dei 4 simboli, le probabilità di trasmissione dei simboli 0 e 1 (nella nostra codifica) saranno:

$$\begin{aligned}p(0) &= p(s_1) + \frac{p(s_2)}{2} + \frac{p(s_3)}{2} = 0.3 + 0.05 + 0.1 = 0.45 \\p(1) &= \frac{p(s_2)}{2} + \frac{p(s_3)}{2} + p(s_4) = 0.05 + 0.1 + 0.4 = 0.55\end{aligned}$$

Se ogni simbolo binario viene riconosciuto mediante confronto con una soglia, usando lo stesso procedimento dell'esercizio precedente si ottiene che

$$\begin{aligned}P(e) &= p(0) p(e|0) + p(1) p(e|1) \\&= 0.45 p(1 + N < V_T) + 0.55 p(-2 + N > V_T)\end{aligned}$$

In assenza di rumore la formula diventa

$$P(e) = 0.45 p(1 < V_T) + 0.55 p(-2 > V_T)$$

che vale 0 per ogni $V_T \in] -2, 1[$. Quindi, non esiste un solo valore di soglia ottimale in assenza di rumore, mentre in presenza di rumore la formula porta a scegliere un particolare valore di V_T .

Osservazione

Assumendo un rumore con funzione densità di probabilità generica $f_N(n)$, la formula diventa

$$\begin{aligned} P(e) &= 0.45 p(N < V_T - 1) + 0.55 p(N > V_T + 2) \\ &= 0.45 \int_{-\infty}^{V_T-1} f_N(n) dn + 0.55 \int_{V_T+2}^{\infty} f_N(n) dn \end{aligned}$$

Per cercare il valore minimo della $P(e)$, si deve derivare rispetto a V_T e porre a zero:

$$\frac{dP(e)}{dV_T} = 0.45 f_N(V_T - 1) + 0.55 (-f_N(V_T + 2)) = 0$$

dove si è sfruttato il fatto che

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} f_N(n) = 0$$

e da cui si può ricavare il valore di V_T .

Ad esempio, nel caso del rumore AWGN indicato più avanti dall'esercizio, il valore di V_T si ottiene da:

$$\begin{aligned} 0.45 e^{-\frac{(V_T-1)^2}{2\sigma_N^2}} &= 0.55 e^{-\frac{(V_T+2)^2}{2\sigma_N^2}} \\ 2\sigma_N^2 \ln \frac{0.45}{0.55} &= (V_T - 1)^2 - (V_T + 2)^2 = -6V_T - 3 \\ V_T &= -0.5 - 2\sigma_N^2 \ln \frac{0.45}{0.55} \end{aligned}$$

Se i simboli binari fossero equiprobabili, la formula darebbe $V_T = -0.5$. Dato che non lo sono, la soglia si sposta verso il simbolo meno probabile (in questo caso il simbolo "0" rappresentato dal valore "+1").

In presenza di rumore si compie errore su s_1 quando si trasmette la sequenza "00" e si riconosce la sequenza "01" o la sequenza "10" o infine la sequenza "11". Quindi

$$p(e|s_1) = p(e|0)(1 - p(e|0)) + (1 - p(e|0))p(e|0) + p(e|0)^2$$

dove il primo termine e il secondo termine rappresentano la probabilità di sbagliare solo il primo zero o solo il secondo zero quando se ne trasmettono due, mentre il terzo termine è la probabilità di sbagliare consecutivamente ambedue gli zeri. Si noti che il rumore è AWGN, quindi scorrelato, e i due eventi (errore sul primo e sul secondo zero) sono quindi indipendenti, così che la probabilità di sbagliare l'uno e/o l'altro è un prodotto di probabilità.

Per rispondere alla richiesta dell'esercizio bisogna quindi calcolare

$$p(e|0) = p(1 + N < V_T) = p(N < V_T - 1) = \int_{-\infty}^{V_T-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}} dn$$

Per quanto riguarda l'ultima domanda, la probabilità di sbagliare qualunque simbolo sarà

$$\begin{aligned} P(e) &= p(s_1) p(e|s_1) + p(s_2) p(e|s_2) + p(s_3) p(e|s_3) + p(s_4) p(e|s_4) \\ &= p(s_1) (p(e|0)(1 - p(e|0)) + (1 - p(e|0))p(e|0) + p(e|0)^2) \\ &+ p(s_2) (p(e|0)(1 - p(e|1)) + (1 - p(e|0))p(e|1) + p(e|0)p(e|1)) \\ &+ p(s_3) (p(e|1)(1 - p(e|0)) + (1 - p(e|1))p(e|0) + p(e|1)p(e|0)) \\ &+ p(s_4) (p(e|1)(1 - p(e|1)) + (1 - p(e|1))p(e|1) + p(e|1)^2) \end{aligned}$$

Soluzione del problema 5.8

Cominciamo con una nota di teoria.

Osservazione

La densità spettrale di potenza dell'equivalente banda base di un segnale numerico modulato è data da:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} S_c(f) |G(f)|^2$$

dove $S_c(f) = \sum_{-\infty}^{\infty} R_c(m) e^{-j2\pi f m T}$ è la trasformata di Fourier della autocorrelazione della sequenza dei simboli trasmessi: $R_c(m) = E(c_{i+m} c_i^*)$.

Dato che l'autocorrelazione di simboli statisticamente indipendenti è:

$$R_c(m) = \begin{cases} E(c_i c_i^*) = E(|c_i|^2) & m = 0 \\ E(c_i) E(c_{i+m}^*) & m \neq 0 \end{cases},$$

la densità spettrale di potenza del segnale modulato sarà

$$S_{s_m}(f) = \frac{1}{4} [S_s(f + f_0) + S_s(f - f_0)] \quad (5.1)$$

dove f_0 è la frequenza della portante.

Si noti inoltre che a potenza media del segnale modulato vale

$$P_m = \int_{-\infty}^{\infty} S_{s_m}(f) df = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(f) df$$

La funzione di autocorrelazione dei simboli d_i è:

$$R_d(m) = \begin{cases} E(d_i^2) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 + \frac{1}{2} \cdot 0^2 = \frac{1}{2} & m = 0 \\ E(d_i)E(d_{i+m}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} & m \neq 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

L'autocorrelazione dei simboli c_i può essere espressa in funzione di $R_d(m)$. Infatti:

$$\begin{aligned} R_c(m) &= E[(d_{i+m} + 2d_{i+m-1})(d_i + 2d_{i-1})] \\ &= E(d_{i+m}d_i) + 2E(d_{i+m-1}d_i) + 2E(d_{i+m}d_{i-1}) + 4E(d_{i+m-1}d_{i-1}) \\ &= R_d(m) + 2R_d(m-1) + 2R_d(m+1) + 4R_d(m) \end{aligned}$$

da cui

$$R_c(m) = 5R_d(m) + 2R_d(m-1) + 2R_d(m+1) \quad (5.3)$$

Utilizzando il risultato dell'equazione 5.2 in 5.3:

$$R_c(m) = \begin{cases} 5R_d(0) + 2R_d(1) + 2R_d(-1) = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} & m = 0 \\ 5R_d(\pm 1) + 2R_d(0) + 2R_d(\pm 2) = \frac{5}{4} + \frac{2}{2} + \frac{2}{4} = \frac{11}{4} & m = \pm 1 \\ 5R_d(m) + 2R_d(m+1) + 2R_d(m-1) = \frac{5}{4} + \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{9}{4} & |m| > 1 \end{cases}$$

La trasformata di Fourier della sequenza di autocorrelazione è quindi:

$$\begin{aligned} S_c(f) &= \frac{7}{2} + \frac{11}{4}e^{-j2\pi fT} + \frac{11}{4}e^{j2\pi fT} + \sum_{|m|>1} \frac{9}{4}e^{-j2\pi fmT} \\ &= \frac{7}{2} + \frac{11}{2} \cos(2\pi fT) + \sum_{|m|>1} \frac{9}{4}e^{-j2\pi fmT} \end{aligned}$$

Infine

$$\begin{aligned} S_c(f) &= \frac{7}{2} + \frac{11}{2} \cos(2\pi fT) + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{9}{4T} \delta(f - \frac{k}{T}) - \frac{9}{4} - \frac{9}{2} \cos(2\pi fT) \\ &= \frac{5}{4} + \cos(2\pi fT) + \frac{9}{4T} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \delta(f - \frac{k}{T}) \end{aligned}$$

La densità spettrale di potenza del segnale in banda base è dunque:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \left(\frac{5}{4} + \cos(2\pi fT) \right) |G(f)|^2 + \frac{9}{4T^2} \delta(f) |G(0)|^2$$

Osservazione

L'ultimo risultato è basato sulla formula di Poisson (che deriva dal teorema del campionamento):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f m T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$$

e nello scrivere l'ultima equazione si è tenuto conto che lo spettro $|G(f)|^2$ è diverso da zero solo per $f < \frac{1}{T}$.

In questo modo, l'unico termine diverso da zero nel prodotto $|G(f)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T}\right)$ risulta essere quello per $k = 0$.

Lo spettro del segnale modulato in banda passante può essere ricavato applicando l'equazione 5.1 alla densità $S_s(f)$ appena trovata e la potenza media ed energia media del segnale modulato diventano:

$$P_s = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(f) df = \frac{5}{8T} + \frac{9}{8T} = \frac{7}{4T}$$

$$E_s = P_s \cdot T = \frac{7}{4} = 1.75$$

ove, nel calcolo di P_s , si è tenuto conto che:

$$\begin{aligned} |G(0)|^2 &= T \\ \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 \cos(2\pi f T) df &= 0 \end{aligned}$$

Osservazione

Le prime due equazioni derivano dalla definizione del filtro a radice di coseno rialzato $G(f)$.

Per quanto riguarda l'ultima:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 \cos(2\pi f T) df = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 \frac{e^{j2\pi f T} + e^{-j2\pi f T}}{2} df$$

Essendo $G(f)$ un filtro a radice di coseno rialzato, $|G(f)|^2$ soddisfa il criterio di Nyquist per evitare l'interferenza intersimbolica e dunque

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 e^{\pm j2\pi f T} df = \rho(\pm T) = 0$$



A

Formulario

Le seguenti tabelle riportano risultati e formule utili per la comprensione e la risoluzione degli esercizi dei capitoli precedenti.

Tabella A.1 Definizioni di funzioni utili

$\text{rect} \left(\frac{t}{W} \right)$	$\begin{cases} 1 & t \leq \frac{W}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$
$\text{triang} \left(\frac{t}{W} \right)$	$\begin{cases} 1 - \frac{ t }{W/2} & t \leq \frac{W}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$
$\text{sinc } tW$	$\frac{\sin \pi tW}{\pi tW}$
$\text{sign } t$	$\begin{cases} -1 & t < 0 \\ 0 & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$

Tabella A.2 Proprietà delle trasformate di Fourier

Funzione	Trasformata
$ah_1(t) + bh_2(t)$	$aH_1(f) + bH_2(f)$
$h(at)$	$\frac{1}{ a } H\left(\frac{f}{a}\right)$
$H(t)$	$h(-f)$
$h(t - t_0)$	$H(f)e^{-j2\pi ft_0}$
$h(t)e^{j2\pi f_0 t}$	$H(f - f_0)$
$\frac{dh(t)}{dt}$	$j2\pi f H(f)$
$\int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$	$\frac{1}{2\pi f} H(f) + \frac{H(0)}{2} \delta(f)$
$h^*(t)$	$H^*(-f)$
$h_1(t)h_2(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} H_1(\lambda)H_2(f - \lambda) d\lambda$
$\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau)h_2(t - \tau) d\tau$	$H_1(f)H_2(f)$

Tabella A.3 Formule delle trasformate di Fourier

Funzione	Trasformata
$A \operatorname{rect} \left(\frac{t}{W} \right)$	$AW \operatorname{sinc} fW$
$A \operatorname{sinc} Wt$	$\frac{A}{W} \operatorname{rect} \left(\frac{f}{W} \right)$
1	$\delta(f)$
$\delta(t)$	1
$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\pi x^2}{2\sigma^2}}$	$e^{-2\pi^2 f^2 \sigma^2}$
$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta(t - iT)$	$\frac{1}{T} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \delta \left(f - \frac{n}{T} \right)$
$\frac{1}{at}$	$-j \operatorname{sign} f$
$e^{j2\pi f_0 t}$	$\delta(f - f_0)$
$\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
$\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
$\operatorname{triang} \left(\frac{t}{W} \right)$	$\frac{W}{2} \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{fW}{2} \right)$

Tabella A.4 Risultati sui segnali periodici (periodo = T)

Espansione in serie di Fourier	$h(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2\pi n t}{T}}$
Densità spettrale di potenza	$S_h(f) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n ^2 \delta \left(f - \frac{n}{T} \right)$
Potenza	$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h^2(t) dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n ^2$
Coefficienti c_n	$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h(t) e^{-j2\pi \frac{n t}{T}} dt$
Autocorrelazione	$R(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} h(t)h(t - \tau) dt$ $= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n ^2 e^{\frac{2\pi n \tau}{T}}$

Tabella A.5 Risultati sui segnali aperiodici

Trasformata di Fourier	$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-2\pi ft} dt$
Teor. di Parseval	$E = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) ^2 df$
Autocorrelazione	$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)h(t - \tau) dt = \mathcal{F}^{-1}(H(f) ^2)$

Tabella A.6 Formule trigonometriche

$\cos \theta$	$\frac{1}{2} [e^{j\theta} + e^{-j\theta}]$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2j} [e^{j\theta} - e^{-j\theta}]$
$\cos 2\theta$	$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
$\sin 2\theta$	$2 \sin \theta \cos \theta$
$\cos^2 \theta$	$\frac{1}{2}[1 + \cos 2\theta]$
$\sin^2 \theta$	$\frac{1}{2}[1 - \cos 2\theta]$
$\sin(\alpha \pm \beta)$	$\sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha \pm \beta)$	$\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
$\tan(\alpha \pm \beta)$	$\frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$
$\sin \alpha \sin \beta$	$\frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$
$\cos \alpha \cos \beta$	$\frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$
$\sin \alpha \cos \beta$	$\frac{1}{2}[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$