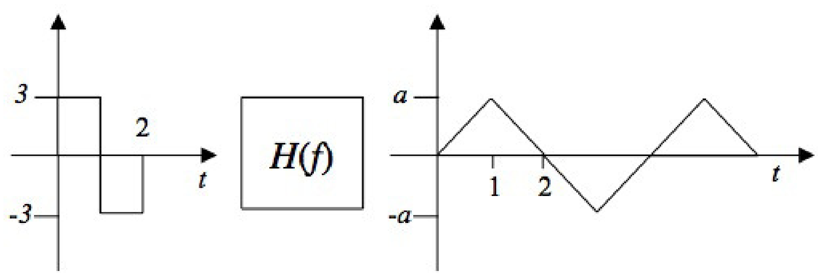
Indice

1

Esame del 12 febbraio 2015

Domanda 1

Sia dato il sistema lineare in figura, di cui sono noti l'ingresso $s(t)$ e l'uscita $v(t)$.



Calcolare:

- l'energia del segnale in ingresso;
- la funzione di trasferimento del blocco lineare (che sarà funzione di a);
- il valore del parametro a affinché i valori dell'energia dei segnali in ingresso e in uscita coincidano.

Domanda 2

Sia dato un modulatore AM-DSB, con coefficiente di modulazione massimo pari a $\frac{1}{30}$.

- Qual è il valore minimo che può assumere il segnale modulante per rimanere demodulabile attraverso un demodulatore ad inviluppo?
- Se il segnale modulante ha l'epressione riportata qui di seguito, quale valore deve avere il parametro B perché valga la condizione di cui al punto precedente?

$$m(t) = 5 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{4t-(4n+1)T_0}{2T_0}\right) \sin(2\pi f_0 t) - B$$

- In questo caso, che potenza ha il segnale modulato in funzione dell'ampiezza della portante, indicata come A?
- Che valore deve avere il parametro A affinché la potenza del segnale modulato sia pari a 100?

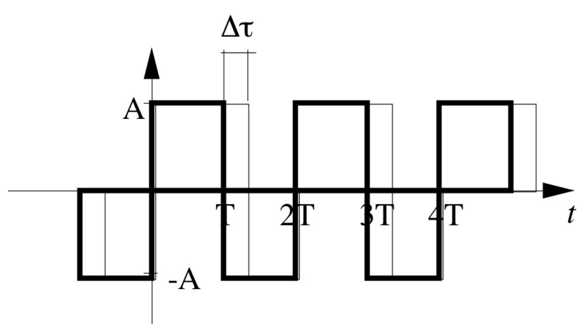
Domanda 2 - testo esami [62...]

Un segnale FM a banda stretta in cui segnale modulante è rappresentabile come un processo ergodico pari a $A\cos(\omega_1 t)$ con ampiezza variabile, da ciclo a ciclo, secondo la variabile casuale A, con funzione densità di probabilità costante nell'intervallo [0, 2].

Qual è la banda media occupata dal segnale FM?
Se il segnale viene demodulato mediante un demodulatore FM con filtro passa-banda iniziale pari a questo valor medio, qual è la percentuale di tempo per cui in uscita dal demodulatore non si avrà nulla?

Domanda 4 - testo esami [62...]

Siano dati i due segnali (periodici) in figura. I segnali originali (a linea più spessa) hanno duty cycle pari a 0.5. Però, un errore di temporizzazione porta ad uno spostamento in avanti di $\Delta\tau$ del punto di passaggio per zero. Questo fatto cambia l'area complessiva del segnale in ogni periodo (originariamente nulla).



Calcolare il valor medio dell'area dei segnali perturbati, dopo aver trovato la funzione densità di probabilità dei valori dell'area per ognuno dei due segnali, sapendo che $\Delta\tau$ è una variabile casuale con funzione densità di probabilità costante nell'intervallo $\left[0, \frac{T}{20}\right]$.

1.1 Soluzioni

Soluzione della Domanda 1

L'energia del primo segnale si calcola facilmente nel dominio del tempo

$$E_i = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\ dt = \int_0^2 (\pm 3)^2\ dt = 18$$

Per quanto riguarda la funzione di trasferimento si può calcolare usando la condizione che

$$H(f) = \frac{V(f)}{S(f)}$$

Per procedere, si noti che l'integrale del segnale in ingresso è un triangolo isoscele con base tra 0 e 2 e altezza pari a 3. Di conseguenza, un triangolo isoscele di altezza a con base tra 0 e 2 corrisponde all'integrale del segnale in ingresso moltiplicato per $\frac{a}{3}$.
Sfruttando questo risultato, il segnale in uscita si può costruire come la somma di tre triangoli, e quindi, ricordando che l'integrazione si traduce in frequenza in un fattore $\frac{1}{j2\pi f}$:

$$V(f) = \frac{1}{j2\pi f}\ \frac{a}{3}\ \left(S(f) - S(f)e^{-j2\pi f 2} + S(f)e^{-j2\pi f 4}\right)$$

Usando la definizione di $H(f)$ di cui sopra si ottiene quindi la risposta al secondo punto:

$$H(f) = \frac{1}{j2\pi f}\ \frac{a}{3}\ \left(1 - e^{-j2\pi f 3} + e^{-j2\pi f 4}\right)$$

Infine. l'energia del segnale in uscita è chiaramente la somma dell'energia dei tre triangoli, quindi tre volte l'energia di un singolo triangolo. Dato che il triangolo è isoscele, la sua energia è il doppio della somma di una delle due metà, e quindi

$$E_o = 3\ \cdot 2\ \cdot \int_0^1 a^2 t^2\ dt = 6\ a^2\ \frac{1}{3} = 2a^2$$

Uguagliando l'espressione con il valore dell'energia in ingresso si ottiene quindi

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}\ 18} = 3$$

Soluzione della Domanda 2

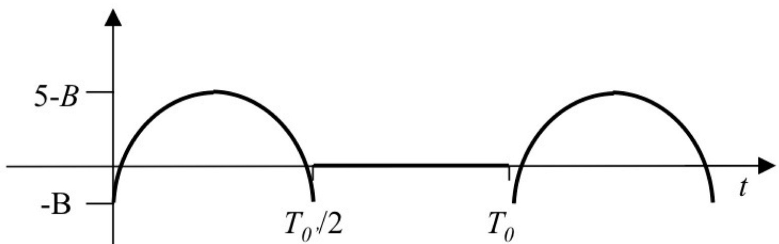
Nel caso si un segnale modulato AM-DSB, vale la condizione

$$k_{max} = \frac{1}{\min_t |m(t)|}$$

dove $m(t)$ è il segnale modulante.
Quindi il minimo (negativo) di $m(t)$ non può essere inferiore a -30, che è il valore richiesto dalla prima domanda dell'esercizio.
Il segnale proposto come segnale modulante può essere riscritto come

$$m(t) = 5 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \text{rect}\left(\frac{t-(4n+1)\frac{T_0}{4}}{\frac{T_0}{2}}\right) \sin(2\pi f_0 t) - B$$

la cui rappresentazione grafica è riportata nella figura successiva



Come si osserva facilmente, il minimo della funzione $m(t)$ è $-B$ e quindi la risposta alla seconda domanda è che, per essere nella condizione di avere un minimo pari a -30, B deve valere 30.
Il segnale modulato ha una potenza che vale

$$P_{AM} = \frac{A^2}{2}\left(1 + k_{max}^2 P_m\right)$$

dove P_m è la potenza del segnale modulante.
Dato che il segnale modulante è composto (vedi figura) da una mezza sinusoide di frequenza f_0 e da una costante di valore $-B$, la sua potenza varrà

$$P_m = B^2 + \frac{1}{2}\frac{5^2}{2}$$

dove si è sfruttato il fatto che la potenza di una sinusoide è pari al valore del quadrato della sua ampiezza diviso per 2 e che in questo caso abbiamo solo mezza sinusoide (quindi metà potenza).
Infine, usando i valori di B e l'espressione sopra riportata e uguagliando la potenza del segnale modulato a 100, come richiesto dall'esercizio, si ottiene che

$$100 = \frac{A^2}{2}\left[1 + \frac{1}{900}\left(900 + \frac{25}{4}\right)\right]$$

da cui

$$A = \sqrt{\frac{100}{\left(1 + \frac{1}{224}\right)}}$$

.

Soluzione della Domanda 2 - testo esami [62...]

Il segnale FM ottenuto dal segnale modulante indicato nel testo vale

$$\begin{aligned} v_{FM}(t) &= A_{FM}\cos\left(\omega_0 t + k'' \int_0^t m(\tau)\, d\tau\right) \\ &= A_{FM}\cos\left(\omega_0 t - \frac{Ak''}{2\pi f_1}\sin(2\pi f_1 t)\right) \end{aligned}$$

e quindi si tratta di un segnale con $\beta = \frac{Ak''}{2\pi f_1}$. Di conseguenza, la banda del segnale FM vale

$$B_c = 2(\beta+1)f_1 = 2\frac{Ak''}{2\pi} + 2f_1$$

Dato che A è una variabile causale, anche B_c lo è, e il suo valore medio è

$$E(B_c) = 2\frac{E(A)k''}{2\pi} + 2f_1$$

dove $E(A)$ = 1 e $\frac{k''}{2\pi} = \Delta f$, quindi $E(B_c) = 2\Delta f + 2f_1$.
In queste condizioni il segnale FM avrà banda compresa tra un valore minimo ($A = 0$) pari a $2f_1$ e un valore massimo ($A = 2$) pari a $4\Delta f + 2f_1$.
Tenendo conto di questo, il segnale in uscita da un demodulatore che abbia in ingresso un filtro passabanda pari a $2\Delta f + 2f_1$ sarà sempre diverso da zero, anche se per metà del tempo il filtro taglierà parte del segnale FM (cioé la banda del segnale sar` più ampia di quella del filtro). Questo accade per A > 1, e la probabilità che ciò accada è pari a $\frac{1}{2}$.

Soluzione della Domanda 4 - testo esami [62...]

Il segnale originale è un segnale deterministico, la cui area A_s è sempre uguale a 0, come indicato nel testo del problema. Per questo motivo la funzione densità di probabilità è una delta centrata in 0 di valore unitario:

$$f(A_s) = \delta(A_s)$$

Il segnale perturbato ha area

$$A'_s = A(T+\Delta\tau) - A(T-\Delta\tau) = 2A\Delta\tau$$

In questi caso A'_s è una variabile casuale, la cui funzione densità di probabilità è costante tra 0 (cioé $2A \cdot \min(\Delta\tau)$) e $2A\ \frac{T}{20}$ (cioé $2A \cdot \max(\Delta\tau)$).
Quindi, sfruttando il fatto che l'area della funzione densità di probabilità deve essere unitaria, si ha che

$$f(A'_s) = \frac{10}{AT} \qquad 0 \le A'_s \le \frac{AT}{10}$$

e il valor medio di A'_s è $\frac{AT}{20}$.

2

Esame del 26 febbraio 2015

Domanda 1

Sia un segnale modulato FM in ingresso ad un moltiplicatore di frequenza con coefficiente di moltiplicazione pari a 10.

Assumendo che il segnale in ingresso abbia portante a frequenza 1 MHz, deviazione di frequenza pari a 30 kHz e il segnale modulante abbia banda pari a 50 kHz, calcolare le stesse quantità (frequenza della portante, Δf e banda del segnale modulante) per il segnale in uscita.
Calcolare inoltre il miglioramento del coefficiente γ dopo il moltiplicatore rispetto al valore prima del moltiplicatore.
Spiegare infine come bisognerebbe complicare il circuito per poter avere in uscita lo stesso segnale, ma mantenendo la portante attorno alla frequenza di 1MHz.

Domanda 2

Sia un segnale digitale ottenuto a partire da una costellazione di 4 simboli, e da un segnale di banda 8 kHz, campionato a due volte la frequenza minima e quantizzato con 256 livelli.

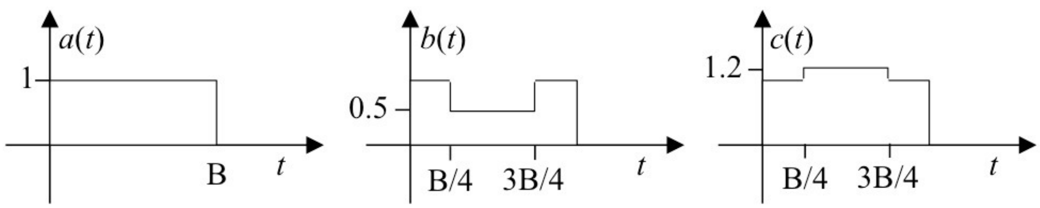
Si chiede di:

- calcolare il tempo di simbolo T_s;
- scrivere l'epressione dello spettro del segnale digitale in funzione della funzione di forma e autocorrelazione della sequenza di simboli, supponendo che i simboli della sequenza siano indipendenti;
- definire il tipo di costellazione sapendo che i quattro simboli sono $(\pm 1, \pm j)$;
- calcolare per questa costellazione la potenza del segnale digitale in funzione dello spettro della funzione di forma, assumendo che i simboli siano equiprobabili;
- assumendo che la funzione di forma sia $g(t) = A\text{rect}\left(\frac{t}{T_s}\right)$, si deduca quale deve esser il valore di A perché la potenza del segnale digitale equivalga all'autocorrelazione della sequenza di simboli divisa per il tempo di simbolo;

- esprimere, infine, la formula della probabilità di errore di questo segnale immerso in un rumore AWGN di varianza σ_0^2.

Domanda 2 - testo esami [62...]

Si considerino i tre segnali in figura, e si calcolino $f(a,b)$ e $f(a,c)$, ove $f(x(t),y(t))$ è definito come il valor massimo della crosscorrelazione tra $x(t)$ e $y(t)$ fratto la radice del prodotto tra l'energia di $x(t)$ e l'energia di $y(t)$.



Domanda 4 - testo esami [62...]

Sia un segnale digitale in cui lo 0 è rappresentato da un rettangolo lungo 1μs e alto 1 mV e l'1 da un impulso uguale, ma di segno negativo.

Qual è la probabilità che un bit sia riconosciuto correttamente da un campione preso esattamente nel suo mezzo se al segnale è sommato un rumore con funzione densità di probabilità costante nell'intervallo [-2mV, 2mV]?

2.1 Soluzioni

Soluzione della Domanda 1

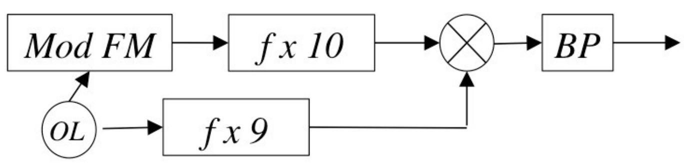
Dopo il moltiplicatore la portante e la deviazione di frequenza sono stati moltiplicati per 10 e quindi $f_0' = 10$ MHz e $\Delta f' = 300$ kHz. La banda B_m del segnale modulante invece non cambia, ed è sempre uguale a 50 kHz.
Di conseguenza, il coefficiente γ dopo il moltiplicatore vale

$$\gamma' = 3\left(\frac{\Delta f'}{B_m}\right)^2 P_m$$

dove P_m è la potenza del segnale modulante, che, come la sua banda, non cambia nel passaggio del segnale FM attraverso il moltiplicatore di frequenza.
Tenendo conto di quanto detto sopra

$$\gamma' = 3\left(\frac{10\Delta f}{B_m}\right)^2 P_m = 100\gamma$$

Per quanto riguarda la modifica per avere a portante sempre a 1 MHz, la soluzione è rappresentata graficamente nella figura successiva, dove il filtro passa banda è costruito in modo da far passare solo le componenti attorno alla frequenza $f_0' - 9f_0$.



Soluzione della Domanda 2

Il generico segnale digitale ha forma

$$s(t) = \sum c_i g(t - iT_s)$$

dove in questo caso T_s (il tempo di simbolo) equivale a 2 volte il tempo di bit (i simboli sono 4 e quindi rappresentano ognuno due bit). A sua volta, T_b (tempo di bit) equivale al tempo di campionamento diviso il numero di bit n_b.
Dato che il campionamento è effettuato a due volte la frequenza minima (cilé due volte la frequenza di Nyquist), la frequenza di campionamento f_s è $2 \cdot 2B$, dove $B = 8$ kHz è la banda del segnale originale.
Quindi

$$T_s = 2T_b = 2\frac{T_s}{n_b} = 2\frac{1}{4Bn_b} = \frac{1}{16B} = \frac{10^{-3}}{122} = 7.81\mu\text{s}$$

Per quanto riguarda l'espressione dello spetto del segnale digitale, si noti che la domanda si riferisce allo spettro **di potenza**, che vale

$$G_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_m R_c(m) \, |G(f)|^2 \; e^{-j\frac{2\pi n f}{T_s}}$$

dove $R_c(m) = E(c_i \cdot c_{i+m}^*)$ è la correlazione tra simboli della sequenza digitale a distanza di m tempi di simbolo. Nel caso in cui i simboli siano indipendenti, $R_c(m) = 0$ per ogni $m \neq 0$ e la formula si riduce a

$$G_s(f) = \frac{R_c(0)}{T_s} \; |G(f)|^2$$

dove

$$R_c(0) = E(c_i \cdot c_i^*) = \frac{2+2+2+2}{4} = 2$$

.
La costellazione indicata dal problema è una 4-QAM, e l'espressione della sua potenza si ottineen dall'integrale della funzione densitĹ spettrale di potenza:

$$P_s = \frac{R_c(0)}{T_s} \int |G(f)|^2 \; df$$

che vale $fracR_c(0)T_s$ sotto al condizione che $\int \; |G(f)|^2 \; df = 1$. Nel caso della funzione $g(t)$ indicata dall'esercizio, si avrà

$$\int \; |G(f)|^2 \; df = A^2 T_s = 1 \quad \Longrightarrow \quad A = \sqrt{T_s}$$

Infine, secondo la teoria la probabilità di errore per una modulazione 4-QAM immersa in rumore AWGN è

$$P(e) = 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) - Q^2\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

dove E_s è l'energia del simbolo che vale $\frac{R_c(0)}{2} = 1$ e $N_0 = \sigma_0^2$ secondo il dato del nostro problema. In queste condizioni

$$P(e) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{1}{\sigma_0^2}}\right).$$

Soluzione della Domanda 1 - testo esami [62...]

I segnali $b(t)$ e $c(t)$ si possono scrivere in funzione del segnale $a(t)$ e di un segnale $d(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{0.5}\right)$. In particolare:

$$
\begin{aligned}
b(t) &= a(t) - \frac{1}{2}\,d(t) \\
c(t) &= a(t) + \frac{1}{5}\,d(t)
\end{aligned}
$$

Calcolando dunque la crosscorrelazione tra $a(t)$ e $b(t)$ si ottiene:

$$
\begin{aligned}
\int a(t)b(t+\tau)\,dt &= \int a(t)a(t+\tau)\,dt - \frac{1}{2}\int a(t)d(t+\tau)\,dt \quad (2.1)\\
&= R_a(\tau) - \frac{1}{2}\,R_{ad}(\tau) \quad (2.2)
\end{aligned}
$$

dove $R_a(\tau)$ è l'autocorrelazione di $a(t)$ e $R_{ad}(\tau)$ la crosscorrelazione tra $a(t)$ e $d(t)$. Similmente:

$$\int a(t)c(t+\tau)\,dt = R_a(\tau) + \frac{1}{5}\,R_{ad}(\tau)$$

Dato che $R_a(\tau)$ e $R_{ad}(\tau)$ hanno i grafici indicati nella figura seguente, si nota che il massimo di ambedue le funzioni, e quindi anche di $R_{ab}(\tau)$ e di $R_{ac}(\tau)$, è in zero e dunque

$$
\begin{aligned}
\max_\tau R_a(\tau) &= B \\
\max_\tau R_{ad}(\tau) &= \frac{B}{2} \\
\max_\tau R_{ab}(\tau) &= f(a,b) = \frac{3}{4}\,B \\
\max_\tau R_{ac}(\tau) &= f(a,c) = \frac{11}{10}\,B
\end{aligned}
$$

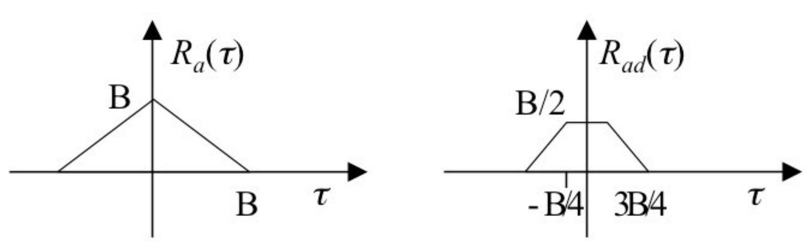


Figura 2.1 I grafici di $R_a(\tau)$ (a sinistra) e $R_{ad}(\tau)$ (a destra).

Per calcolare $f(a(t), b(t))$ e $f(a(t), c(t))$ manca ora il calcolo delle energie:

$$\begin{aligned} E(a(t)) &= B \\ E(b(t)) &= \frac{B}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{B}{2} + \frac{B}{4} = \frac{5B}{8} \\ E(c(t)) &= \frac{B}{4} + 1.44 \cdot \frac{B}{2} + \frac{B}{4} = 1.22B \end{aligned}$$

Quindi, in conclusione:

$$\begin{aligned} f(a(t), b(t)) &= \max_{\tau} \frac{R_{ab}(\tau)}{\sqrt{E(a(t) \cdot E(b(t))}} = \frac{3}{4}B \cdot \frac{2}{B}\sqrt{\frac{2}{5}} = \sqrt{\frac{9}{10}} \approx 0.94 \\ (a(t), c(t)) &= \max_{\tau} \frac{R_{ac}(\tau)}{\sqrt{E(a(t) \cdot E(c(t))}} = \frac{11}{10}B \cdot \frac{1}{\sqrt{1.2B}} \approx 0.99 \end{aligned}$$

Soluzione della Domanda 4 - testo esami [62...]

La probabilità di errore si calcola come

$$P(e) = p(0)p(e|0) + p(1)p(e|1)$$

dove

$$\begin{aligned} p(e|0) &= p(10^{-3} + N < 0) = p(N < -10^{-3}) \\ p(e|1) &= p(-10^{-3} + N > 0) = p(N > 10^{-3}) \end{aligned}$$

Come si nota dalla simmetria della funzione densità di probabilità del rumore, $p(e|0)$ e $p(e|1)$ sono uguali e valgono:

$$p(e|0) = \int_{-2\cdot 10^{-3}}^{-1\cdot 10^{-3}} 250 \, dN = \frac{250}{1000} = \frac{1}{4}.$$

dove si è sfruttato che il rumore ha una funzione densità di probabilità costante. Quindi, in totale:

$$P(e) = p(0)p(e|0) + p(1)p(e|0) = (p(0) + p(1))\, p(e|0) = 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

e la probabilitĹ di corretta ricezione è dunque pari a $1 - P(e) = \frac{3}{4}$.

3

Esame del 10 aprile 2015

Domanda 1

Sia dato un sistema con segnali in ingresso ed uscita come qui di seguito elencato (i tempi sono in millisecondi):

- Ingresso: $\mathrm{rect}\left(\frac{t-3}{2}\right)$
- Uscita: $\frac{\delta(t-2)}{3} - \frac{\delta(t-4)}{3} + \mathrm{triang}\left(\frac{t-10}{4}\right)$

Calcolare la risposta impulsiva del sistema e la risposta nel caso in cui in ingresso si abbia un segnale coseno di ampiezza 5 e frequenza 1 kHz.

Domanda 2

Sia il segnale digitale che si ottiene trasmettendo un segnale televisivo corrispondente ad un'immagine di 1024 per 950 pixel, trasmesso in raster scanning (cioé riga per riga), con una velocità compressiva di 50 immagini al secondo. Il dato corrispondente ad ogni pixel è una terna di valori RGB, ognuno codificato con 1024 livelli. Si richiede di:

- calcolare il numero di bit per secondo necessari a trasmettere il segnale e tempo di bit T_b;
- scrivere la formula della probabilità di errore nel caso in cui il segnale digitale sia trasmesso usando una costellazione B-PSK, con distanza tra i simboli pari a 2, sapendo che il segnale è soggetto ad un rumore AWGN e ad un disturbo costante pari a 0.5;
- disegnare nel piano complesso la costellazione in trasmissione e (qualitativamente) in ricezione sia nelle condizioni precedenti sia nel caso in cui il rumore AWGN sia assente.

Domanda 4 - testo esami [62. . .]

Siano due variabili casuali X e Y. Quando si può dire che sono indipendenti e quando che sono scorrelate?

Si consideri che X abbia una funzione densità di probabilità costante nell'intervallo $[a, a]$, e $Y = X^2$. X e Y sono scorrelate? Sono indipendenti?

3.1 Soluzioni

Soluzione della Domanda 1

La derivata del segnale in ingresso è pari a:

$$\delta(t-2) - \delta(t-4)$$

mentre la derivata di triang$\left(\frac{t-10}{4}\right)$ è pari a 500 rect$\left(\frac{t-9}{2}\right)$ - 500 rect$\left(\frac{t-11}{2}\right)$
Perciò, chiamando $s(t)$ l'ingresso e $v(t)$ l'uscita, si avrà che (tempi in millisecondi):

$$v(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + \int 500\,[s(t-6) - s(t-9)]\ dt$$

La risposta impulsiva è quindi:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{d\delta(t)}{dt} + \int 500\,[\delta(t-6) - \delta(t-9)]\ dt \\ &= \frac{1}{3}\,\delta'(t) + 500\ \mathrm{r}ect\left(\frac{t-7.5}{3}\right) \end{aligned}$$

e, quando in ingresso si avrà il coseno indicato nell'esercizio, l'uscita diventerà:

$$v(t) = \frac{10000\pi}{3}\sin(2\pi 1000t) + \frac{\sin[2\pi 1000(t-6)] - \sin[2\pi 1000(t-9)]}{4\pi}.$$

Soluzione della Domanda 2

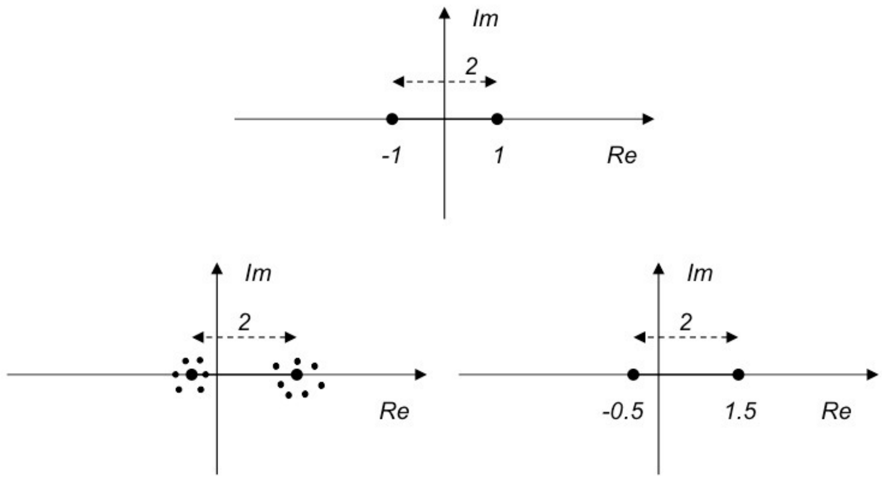
Ogni immagine è composta da 1024 x 950 = 972800 pixel. Ogni pixel porta tre valori (R, G e B), ognuno codificato con 1024 livelli, cioé 10 bit, quindi per trasmettere un pixel bisogna trasmettere 30 bit e per trasmettere un'immagine bisogna trasmettere 30 x 972800 = 29184000 bit. Dato che si trasmettono 50 immagini al secondo, i bit da trasmettere al secondo (il cosiddetto *bit rate*) sono 29184000 x 50 = 1459200000 bit/secondo. Ad ogni bit quindi sarà quindi possibile assegnare un tempo di bit T_b non più lungo di 1/1459200000= 6.810^{-10} s.

Nel caso di una costellazione B-PSK con distanza dei simboli pari a 2, la probabilità di errore in presenza di rumore bianco AWGN con densità spettrale di potenza pari a N_0, sarà

$$P(e) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0}}\right),$$

dove si è assunto che le probabilità dei bit 0 e 1 siano uguali (e pari a 0.5). Nel caso in cui in aggiunta al rumore AWGN si abbia un disturbo costante pari a 0.5, la formula di sopra viene modificata in

$$P(e) = \frac{1}{2}\,Q\left(\frac{1-0.5}{\sqrt{N_0}}\right) + \frac{1}{2}\,Q\left(\frac{1+0.5}{\sqrt{N_0}}\right)$$



Soluzione della Domanda 4 - testo esami [62. . .]

Le due variabili casuali X e Y sono scorrelate se la loro correlazione è nulla, cioé se

$$E(X \cdot Y) = \int \int xy \cdot f_{XY}(x, y)\; dxdy = 0$$

mentre le variabili sono indipendenti se la loro funzione densità di probabilità congiunta è uguale al prodotto delle funzioni densità di probabilità delle due variabili:

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Nel caso indicato dall'esercizio, le variabili non sono ovviamente indipendenti, mentre sono scorrelate. Infatti:

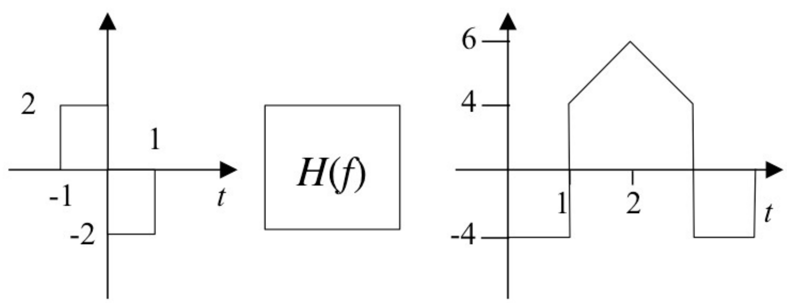
$$E(X \cdot Y) = \int x \cdot x^2 f_X(x)\; dx = \int_{-a}^{a} x^3 \frac{1}{2a}\; dx = 0.$$

4

Esame del 15 giugno 2015

Domanda 1

Sia dato il blocco in figura, con i segnali $s(t)$ in ingresso e $v(t)$ uscita. Se ne calcolino la funzione di trasferimento e la risposta impulsiva (i tempi sono in millisecondi).

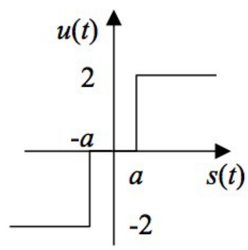


Si ponga poi il segnale in uscita a questo blocco in ingresso a un modulatore AM-DSB. Si calcolino:

- il massimo valore dell'indice di modulazione;
- la potenza del segnale calcolata come il rapporto tra la sua energia e la sua durata;
- la potenza del segnale modulante nel caso in cui il coefficiente di modulazione sia pari al 75% del massimo e l'ampiezza della portante sia unitaria;
- il coefficiente γ della modulazione in queste condizioni e il rapporto tra la deviazione di frequenza e la banda del segnale modulante per una modulazione FM che abbia un γ pari a 10 volte quello della modulazione AM-DSB.

Domanda 2

Si consideri il segnale $s(t)$ dell'esercizio precedente e lo si renda periodico con un periodo pari a 4 ms. A questo segnale si somma un disturbo rappresentabile da una variabile casuale N con funzione densità di probabilità costante nell'intervallo [-0.75, + 0.75]. Il segnale più il disturbo entrano in un blocco limitatore con funzione ingresso/uscita come in figura.



Si discuta quale valore (o valori) deve assumere il parametro a perché il segnale $u(t)$ in uscita da questo blocco sia il più simile possibile al segnale $s(t)$.
Se adesso la variabile casuale N è supposta con funzione densità di probabilità costante nell'intervallo [-3, + 3] e posta da sola in ingresso al, blocco limitatore, quale sarà la funzione densità di probabilità della variabile in uscita?

Domanda 4 - testo esami [62. . .]

Sia dato un segnale FM a banda stretta che occupa una banda di 100 kHz. Il segnale viene posto in ingresso ad un moltiplicatore di frequenza che moltiplica per un fattore pari a 100.
Di quanto è cambiata la banda del segnale dopo il moltiplicatore? Se adesso consideriamo il segnale modulante in ingresso a un modulatore AM-DSB-SC, quale sarà la banda del segnale modulato in questo caso?

4.1 Soluzioni

Soluzione della Domanda 1

Il segnale in uscita dal blocco si può riscrivere come

$$v(t) = -2s(t-1) + 2s(t-3) + \int_0^t s(\tau - 2)\, d\tau.$$

Di conseguenza, la risposta impulsiva e la funzione di trasferimento del blocco saranno:

$$\begin{aligned} h(t) &= -2\delta(t-1) + 2\delta(t-3) + u(t-2) \\ H(f) &= -4je^{-j4\pi f}\sin(2\pi f) + \frac{e^{-j4\pi f}}{j2\pi f} \end{aligned}$$

dove $u(t)$ è la funzione gradino unitario.
L'indice di modulazione massimo per la modulazione AM è l'inverso del minimo negativo della funzione, che vale -4, quindi

$$k_{max} = \frac{1}{4}$$

L'energia del segnale è pari all'integrale del suo quadrato, quindi (fatte le debite semplificazioni e calcolando l'integrale dei due tratti di parabola come il doppio dell'integrale di uno di essi):

$$E_m = 16 \cdot 2 + 2\int_1^2 [2(t+1)]^2\ dt = 32 + 2 \cdot \frac{76}{3} = \frac{248}{3} = 82.66$$

e quindi la potenza P_m vale 20.66.
La potenza del segnale AM sarà quindi (si ricordi che $k = 3/4 \cdot k_{max}$):

$$P_{AM} = \frac{A^2}{2}\left(1 + k^2 P_m\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{3}{16}\right)^2 \cdot 20.66\right) \approx 0.86$$

e il γ:

$$\gamma = \frac{k^2 P_m}{1 + k^2 P_m} = \frac{\frac{9}{256}\, 20.66}{1 + \frac{9}{256}\, 20.66} \approx 0.42$$

Il γ della modulazione FM, che è 10 volte quello appena calcolato, permette quindi di trovare l'ultimo dato richiesto dal problema:

$$\begin{aligned} \gamma_{FM} &= 3\left(\frac{\Delta f}{B_m}\right)^2 P_m \\ \frac{\Delta f}{B_m} &= \sqrt{\frac{\gamma_{FM}}{3P_m}} \approx 0.26 \end{aligned}$$

Soluzione della Domanda 2

La differenza tra il segnale in uscita dal limitatore e il segnale $s(t)$ originale dipende dal disturbo N e dalla soglia a. Dato che il disturbo (in modulo) non è superiore a 0.75, se $a < 2 - 0.75 = 1.25$, si avrà differenza solo quando $|N| > a$. Quindi

$$P(e) = P(|N| > a) = 2 \cdot \left(\frac{3}{4} - a\right)$$

Se dunque $0.75 < a < 1.25$, tale probabilità è nulla e il segnale in uscita corrisponde esattamente al segnale originale $s(t)$.

Per quanto riguarda il caso senza segnale e solo con il disturbo in ingresso (con funzione densità di probabilità costante tra -3 e 3), la variabile in uscita Y è una variabile discreta, che può assumere solo i valori -2, 2 e 0.
In questo caso

$$f_Y(y) = p(0)\ \delta(y) + p(-2)\ \delta(y+2) + p(2)\ \delta(y-2)$$

dove

$$\begin{aligned} p(0) &= P(|n| < a) = \int_{-a}^{a} f(n)\ dn = \frac{1}{6} \cdot 2a = \frac{a}{3} \\ p(-2) &= P(n < -a) = \int_{-3}^{-a} f(n)\ dn = \frac{3-a}{6} \\ p(2) &= P(n > a) = \int_{a}^{3} f(n)\ dn = \frac{3-a}{6} \end{aligned}$$

Soluzione della Domanda 4 - testo esami [62. . .]

Se il segnale FM è a banda stretta (NBFM), allora

$$B_{FM} = 2\ B_m$$

dove B_m è la banda del segnale modulante, quindi 50 kHz.
Dopo il moltiplicatore

$$\begin{aligned} B'_{FM} &= 100\ B_{FM} \\ \gamma' &= 100\ \gamma \\ f'_0 &= 100\ f_0 \end{aligned}$$

Se lo stesso segnale modulante è posto in ingresso ad un modulatore AM, la banda in uscita sarà identica a quella del segnale NBFM di cui sopra, visto che anche in questo caso

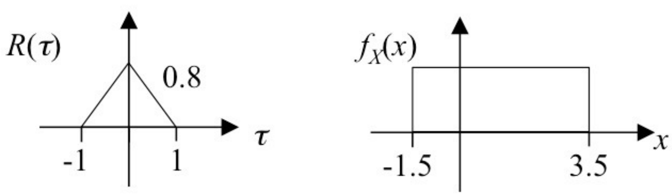
$$B_{AM} = 2\ B_m.$$

5

Esame del 2 luglio 2015

Domanda 1

Sia dato un processo casuale stazionario $X(t)$ la cui autocorrelazione è indicata in figura (i tempi sono in microsecondi). Nella stessa figura è rappresentata la funzione densità di probabilità della variabile X.

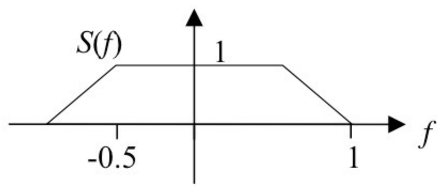


Questo processo è posto in ingresso a un modulatore AM-DSB. Si calcolino:

- il massimo valore dell'indice di modulazione;
- la densità spettrale $S_X(f)$ del processo causale;
- la banda del processo causale approssimata al primo zero di $S_X(f)$;
- la potenza del segnale modulato AM nel caso in cui l'ampiezza della portante sia pari a 2;
- la banda del segnale modulato AM;
- l'intervallo di valori $\pm\tau$ attorno a 0 per cui vale $R(\tau) \geq 0.25 P_x$, dove P_x è la potenza del processo causale.

Domanda 2

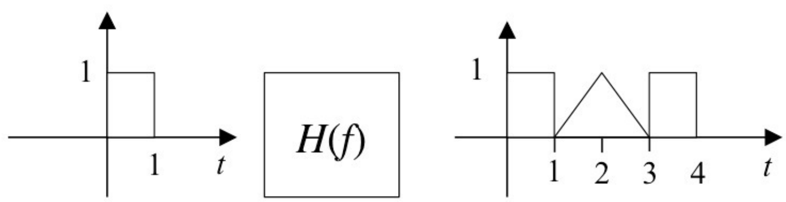
Si consideri il segnale $s(t)$ il cui spettro è indicato in figura (le frequenze sono in MHz).



Dopo aver scritto l'espressione del segnale nel tempo e averne calcolato l'energia, calcolare il tempo di bit necessario a trasformare questo segnale in un segnale digitale con una precisione dello 0.1%.
Assumendo poi che il segnale digitale venga trasmesso mediante una costellazione con energia di simbolo $E_s = 0.5$, calcolare la massima densitĹ spettrale del rumore AWGN che si può accettare sul canale per avere un rapporto E_s/N_0 maggiore o uguale a 0 (in dB).
Pensando infine che il segnale digitale sia trasmesso in banda base assieme ad una copia (opportunamente traslata in frequenza) del segnale analogico originale, trasmesso in modulazione FM con Δf pari a 5 MHz, indicare quale debba essere la frequenza della portante del canale FM volendo avere una banda di guardia di 200 kHz tra i due segnali.

Domanda 4 - testo esami [62. . .]

Sia dato il blocco in figura. Se ne scriva e disegni la risposta impulsiva.



5.1 Soluzioni

Soluzione della Domanda 1

Per un processo casuale stazionario la potenza coincide con la autocorrelazione per $\tau = 0$, quindi vale 0.8 (dal grafico).
Similmente, dall'altro grafico si deduce che il processo assume valori compresi tra -1.5 e 3.5, quindi il suo minimo è -1.5. Secondo la definizione dell'indice di modulazione di una modulazione AM-DBS,

$$k_{\max} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$$

Per quanto riguarda la densità spettrale di potenza, si può ricavare come trasformata dell'autocorrelazione, quindi:

$$S_X(f) = 0.8 \cdot 10^{-6} \mathrm{sinc}^2(f\ 10^{-6})$$

e di conseguenza la banda coincide con il primo zero della sinc, che si ha quando il suo argomento vale 1, quindi $B_m = 10^6$ Hz.
A questo punto

$$P_{AM} = \frac{A^2}{2}\left(1 + k^2 P_m\right) = \frac{4}{2}\left(1 + \frac{4}{9} \cdot 0.8\right) \approx 2.71$$

e la banda del segnale modulato è $B_{AM} = 2 \cdot B_m = 2$ MHz.
Per quanto riguarda la l'intervallo dei valori di τ si deducono dal fatto che P_X vale 0.8 e decresce linearmente in un tempo pari a 1 microsecondo. Per diventare un quarto di 0.8, ci vorranno quindi 0.75 microsecondi e l'intervallo richiesto $\pm\tau$ vale 1.5 microsecondi.

Soluzione della Domanda 2

La formula analitica della trasformata del segnale $s(t)$ vale (cpn le frequenze in MHz):

$$S(f) = 2\mathrm{triang}\left(\frac{f}{2}\right) - \mathrm{triang}\left(f\right)$$

per cui il segnale sarà:

$$s(t) = 2\ \mathrm{sinc}^2(2f) - 0.5\ \mathrm{sinc}^2(t)$$

con il tempo in microsecondi.
Per quanto riguarda l'energia del segnale, si può calcolare in frequenza:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2\ df = 2\int_0^{10^6} |S(f)|^2\ df = 2\left(0.5 + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{8}\right) 10^6 = \frac{4}{3}\ 10^6$$

Il numero di bit n_b necessari ad una precisione dello 0.1% è pari a 9, quindi (tempo in microsecondi)

$$T_b = \frac{T_c}{n_b} = \frac{1}{2B_m n_b} = \frac{1}{18}$$

Per quanto riguarda la potenza del rumore AWGN, la condizione $E_s/N_0 \geq 0$ in dB si traduce in $E_s/N_0 \geq 1$ in lineare, cioé $N_0 \leq E_s = 0.5$, da cui la condizione sulla densità spettrale di potenza:

$$\frac{N_0}{2} \leq \frac{1}{4}.$$

Infine, assumendo che la banda del segnale digitale B_{PCM} sia all'incirca pari a $T_b^{-1} = 18$ MHz, si ottiene

$$f_0 = B_{PCM} + B_g + \frac{1}{2}\,B_{FM} = 18 + 0.2 + \frac{1}{2}\,2(5+1) = 24.2 \text{ MHz}$$

Soluzione della Domanda 4 - testo esami [62...]

Il segnale in uscita può essere facilmente costruito a partire da quello in ingresso:

$$v(t) = s(t) + s(t-3) + \int_0^t s(\tau - 1) - s(\tau - 2)\; d\tau$$

DSi può quindi calcolare diretatmente la risposta impulsiva:

$$h(t) = \delta(t) + \delta(t-3) + \text{rect}\left(\frac{t - 3/2}{1}\right)$$

rappresentata graficamente nella figura seguente: